

(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. کارآگاه گجت ۳۶ سنگ به وزنهای ۱, ۲, ..., ۳۶ گرم دارد. دکتر کلاو، یک چسب قوی دارد که یک قطره آن می‌تواند دو سنگ را به هم بچسباند و به یک سنگ تبدیل کند (بنابراین دو قطره چسب می‌تواند ۳ سنگ را بهم بچسباند والی آخر). دکتر کلاو می‌خواهد بعضی از سنگ‌ها را بهم بچسباند بطوری که در مجموعه‌ی حاصل، کارآگاه گجت قادر نباشد یک یا چند سنگ با مجموع وزن ۳۷ گرم انتخاب کند. حداقل تعداد قطره‌های لازم برای اینکه دکتر کلاو بتواند این کار را انجام دهد را پیدا کنید.

[۴ امتیاز]

۲. در یک چهارضلعی محدب  $ABCD$  قطرهای برهم عمودند. نقاط  $M$  و  $N$  به ترتیب روی اضلاع  $AD$  و  $CD$  مشخص شده‌اند. زوایای  $ABN$  و  $CBM$  قائمند. ثابت کنید خطوط  $AC$  و  $MN$  موازی‌اند.

[۴ امتیاز]

۳. علی بابا و چهل دزد می‌خواهند از تنگه بوسفر عبور کنند. آن‌ها یک صف تشکیل می‌دهند، به طوری که هر دو نفری که کنار هم قرار دارند، دوست هستند. علی بابا نفر اول است. نفر سوم در صف نیز دوست علی بابا است. یک قایق وجود دارد که می‌تواند ۲ یا ۳ نفر را حمل کند که همگی باید دوست باشند. یک نفر به تنهایی نمی‌تواند قایق را براند. آیا علی بابا و چهل دزد قطعاً می‌توانند از تنگه عبور کنند؟

[۵ امتیاز]

۴. اعداد طبیعی  $a, b, c, d$  دو بدو نسبت بهم اولند و در معادله  $ab + cd = ac - 1 \cdot bd$  صدق می‌کنند. ثابت کنید همواره می‌توان سه عدد از بین این اعداد انتخاب کرد به طوری که یکی از آن‌ها برابر مجموع دو عدد دیگر باشد.

[۵ امتیاز]

۵. مسیرهای یک پارک بزرگ از اضلاع و اقطار یک چهارضلعی محدب  $ABCD$  عبور می‌کنند. علی از نقطه  $A$  شروع کرده و در مسیر  $AB - BC - CD$  حرکت می‌کند. بهرام در مسیر  $AC$  حرکت می‌کند. او همزمان با علی از نقطه  $A$  شروع به حرکت می‌کند و همزمان با او به نقطه  $C$  می‌رسد. کوروش در مسیر  $BD$  حرکت می‌کند. او در لحظه‌ای که علی از  $B$  عبور می‌کند، این نقطه را ترک می‌کند و همزمان با علی به نقطه  $D$  می‌رسد. آیا ممکن است که بهرام و کوروش همزمان به نقطه  $O$  محل تقاطع  $AC$  و  $BD$  برسند؟ سرعت هر سه نفر ثابت است.

[۵ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points problems

1. Inspector Gadget has 36 stones of masses 1 gram, 2 grams, ..., 36 grams. Doctor Claw has a superglue such that one drop of it glues two stones together into one stone (thus two drops glue 3 stones together and so on). Doctor Claw wants to glue some stones so that in the obtained set Inspector Gadget will not be able to choose one or more stones with the total mass 37 grams. Find the least number of drops needed for Doctor Claw to fulfil his task.
 

4
2. In a convex quadrilateral  $ABCD$  the diagonals are perpendicular. Points  $M$  and  $N$  are marked on sides  $AD$  and  $CD$  respectively. Angles  $ABN$  and  $CBM$  are right angles. Prove that lines  $AC$  and  $MN$  are parallel.
 

4
3. Ali Baba and the 40 thieves want to cross the Bosphorus strait. They made a line so that any two people standing next to each other are friends. Ali Baba is the first; the thief next to his neighbour is also Ali Baba's friend. There is a single boat that can carry 2 or 3 people and these people must be friends. A single person cannot sail. Can Ali Baba and the 40 thieves surely cross the strait?
 

5
4. Positive integers  $a, b, c, d$  are pairwise coprime and satisfy the equation
 
$$ab + cd = ac - 10bd.$$

5

Prove that one can always choose three numbers among them such that one of the numbers equals the sum of the two others.
5. The paths of a large park go along sides and diagonals of the convex quadrilateral  $ABCD$ . Alex starts at  $A$  and hikes along  $AB - BC - CD$ . Ben hikes along  $AC$ ; he leaves  $A$  simultaneously with Alex and arrives to  $C$  simultaneously with Alex. Chris hikes along  $BD$ ; he leaves  $B$  at the same time as Alex passes  $B$  and arrives to  $D$  simultaneously with Alex. Can it happen that Ben and Chris arrive at the point  $O$  of intersection of  $AC$  and  $BD$  at the same time? The speeds of the hikers are constant.
 

5