شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2014

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۲

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. در طول جشن نوروز، سارا ۴۷ شکلات و ۷۴ مربا بین بچه‌ها توزیع می‌کند. هر دختر یک شکلات بیشتر از هر پسر دریافت می‌کند، اما هر پسر یک مربا بیشتر از هر دختر دریافت می‌کند. تعداد بچه‌ها چند تا است؟ [۳ امتیاز]

۲. پویا چند خانه از یک جدول 5×5 را علامت می‌زند. بهرام برنده می‌شود اگر بتواند همه خانه‌های علامت‌دار را با کنج‌های سه‌خانه‌ای (به‌صورت L) بپوشاند. کنج‌ها باید درون جدول باشند و روی هم قرار نگیرند. کمترین تعداد خانه‌هایی که پویا باید علامت بزند تا از بردن بهرام جلوگیری کند، چندتا است؟ (خانه‌های کنج‌ها باید منطبق بر خانه‌های جدول باشند). [۵ امتیاز]

۳. روی یک میز مربعی یک رومیزی مربعی (احتمالاً با اندازه متفاوت) که بدون تا و چروک است، پهن شده است. هر چهار گوشه میز پوشیده نشده و هر چهار بخش آویزان رومیزی، مثلثی هستند. با این فرض که دو بخش آویزان مجاور رومیزی یکسان هستند، ثابت کنید دو بخش دیگر نیز یکسان هستند. [۶ امتیاز]

۴. پادشاه دو نابغه را فراخواند. او به نابغه اول دستور داد که ۱۰۰ عدد طبیعی (نه لزوماً متمایز) را روی ۱۰۰ کارت بنویسد (روی هر کارت یک عدد)، بدون اینکه آن‌ها را به نابغه دوم نشان دهد. نابغه دوم باید همه این اعداد را به درستی تشخیص دهد (برای مثال، اگر سه کارت با عدد ۵ وجود داشته باشد، نابغه دوم باید آن را تشخیص دهد) و در غیر این‌صورت هر دو نابغه سر خود را از دست می‌دهند. نابغه اول اجازه دارد یک لیست از اعداد متمایز را به نابغه دوم بدهد به‌طوری که هر کدام از اعداد این لیست باید یکی از اعداد روی کارت‌ها یا جمع تعدادی از این اعداد باشد. او اجازه ندارد که بگوید کدام عدد یکی از اعداد روی کارت‌ها است و کدام عدد مجموع چند عدد روی کارت‌ها است. هنگامی که او اعداد را روی کارت‌ها می‌نویسد، می‌داند که قرار است لیستی از اعداد را به نابغه دوم بدهد، ولی هیچ ارتباطی بین دو نابغه وجود ندارد. در نهایت پادشاه به تعداد اعداد در لیست داده شده به نابغه دوم، از ریش‌های هر کدام از نابغه‌ها می‌کَنَد. کمترین تعداد موهایی که هر نابغه باید از دست بدهد تا زنده بماند، چند تا است؟ [۷ امتیاز]

۵. چند نقطه سفید و سیاه وجود دارد. هر نقطه سفید به‌وسیله یک پاره‌خط به هر نقطه سیاه وصل شده است. روی هر پاره‌خط یک عدد طبیعی نوشته شده است. برای هر مدار بسته، حاصلضرب اعداد روی پاره‌خط‌هایی که در جهت خانه سفید به خانه سیاه طی می‌شوند، برابر است با حاصلضرب اعداد روی پاره‌خط‌هایی که در جهت عکس طی می‌شوند. (یعنی در هر مدار بسته حاصلضرب اعداد روی پاره‌خط‌های یکی در میان، با حاصلضرب اعداد روی بقیه پاره‌خط‌های مدار، برابر است.) آیا همواره می‌توانیم روی هر نقطه یک عدد طبیعی قرار دهیم، به‌طوری که عدد روی هر پاره‌خط برابر حاصلضرب اعداد دو سرش باشد. [۷ امتیاز]

۶. یک مکعب $3 \times 3 \times 3$ از مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ تشکیل شده است. بیشترین تعداد مکعب‌های کوچکی که بتوان حذف کرد به طوری که جسم باقی‌مانده ویژگی‌های زیر را داشته باشد، چند تا است؟

(۱) تصویر این جسم روی هر وجه مکعب اصلی، یک مربع 3×3 باشد. (۲) جسم حاصل وجه-همبند باقی بماند (یعنی از هر مکعب کوچک بتوان با دنباله‌ای از مکعب‌های پشت سرهم که وجه مشترک دارند، به هر مکعب دیگر رسید). [۹ امتیاز]

۷. نقاط $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ به ترتیب در جهت ساعتگرد روی یک دایره مشخص شده‌اند. می‌دانیم که می‌توان این نقاط را به جفت نقطه‌های متقارن نسبت به مرکز دایره، تقسیم کرد. در ابتدا روی هر نقطه مشخص شده، یک ملخ قرار دارد. در هر دقیقه یکی از ملخ‌ها در مسیر دایره از روی ملخ همسایه‌اش می‌پرد به طوری که فاصله بین آن دو تغییر نکند. در مسیری که یک ملخ پرواز می‌کند باید تنها یک ملخ نشسته باشد و یک ملخ نمی‌تواند در خانه‌ای که اشغال شده است، بنشیند. می‌دانیم که در لحظه‌ای، ۹ ملخ در نقاط $A_1, A_2, \ldots, A_9$ قرار دارند و ملخ دهم روی کمان $A_9A_{10}A_1$ است. آیا لزوماً این درست است که ملخ دهم دقیقاً در نقطه A_{10} قرار دارد؟ [۹ امتیاز]

شماره گروه:

۱A

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2014

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۲

خانه ریاضیات

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
3	1. During Christmas party Santa handed out to the children 47 chocolates and 74 marmalades. Each girl got 1 more chocolate than each boy but each boy got 1 more marmalade than each girl. What was the number of the children?
5	2. Peter marks several cells on a 5×5 board. Basil wins if he can cover all marked cells with three-cell corners. The corners must be inside the board and not overlap. What is the least number of cells Peter should mark to prevent Basil from winning? (Cells of the corners must coincide with the cells of the board).
6	3. A square table is covered with a square cloth (may be of a different size) without folds and wrinkles. All corners of the table are left uncovered and all four hanging parts are triangular. Given that two adjacent hanging parts are equal prove that two other parts are also equal.
7	4. The King called two wizards. He ordered First Wizard to write down 100 positive integers (not necessarily distinct) on 100 cards (one number on each card) without revealing them to Second Wizard. The second wizard must surely determine all the numbers on the cards (for instance, if there are three cards with the number 5, the second wizard must determine this), otherwise both wizards will lose their heads. First Wizard is allowed to provide Second Wizard with a list of distinct numbers, each of which is either one of the numbers on the cards or a sum of some of these numbers. He is not allowed to tell which numbers are on the cards and which numbers are their sums. When the first wizard writes the numbers on the cards, he already knows that then he will give the list of numbers for the second wizards. But there is no contact between wizards. Finally the King tears as many hairs from each wizard's beard as the number of integers in the list given to Second Wizard. What is the minimal number of hairs each wizard should lose to stay alive?
7	5. There are several white and black points. Every white point is connected with every black point by a segment. Each segment is equipped with a positive integer. For any closed circuit the product of the numbers on the segments passed in the direction from white to black point is equal to the product of the numbers on the segments passed in the opposite direction. Can one always place the positive integer at each point so that the number on each segment is the product of the numbers at its ends?
9	6. A $3 \times 3 \times 3$ cube is made of $1 \times 1 \times 1$ cubes. What is the maximal number of small cubes one can remove so the remaining solid has the following features: 1) Projection of this solid on each face of the original cube is a 3×3 square; 2) The resulting solid remains face-connected (from each small cube one can reach any other small cube along a chain of consecutive cubes with common faces).
9	7. Points A_1, A_2, ..., A_{10} are marked on a circle clockwise. It is known that these points can be divided into pairs of points symmetric with respect to the centre of the circle. Initially at each marked point there was a grasshopper. Every minute one of the grasshoppers jumps over its neighbour along the circle so that the resulting distance between them doesn't change. It is not allowed to jump over any other grasshopper and to land at a point already occupied. It occurred that at some moment nine grasshoppers were found at points A_1, A_2, ..., A_9 and the tenth grasshopper was on arc $A_9A_{10}A_1$. Is it necessarily true that this grasshopper was exactly at point A_{10}?

شماره گروه:

۲A

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2014

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۲

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. دنا چند تا عدد ۱ نوشت و بین هر دو تا از آن‌ها علامت + یا × قرار داد. سپس چند پرانتز بین آن‌ها گذاشت و حاصل را برابر ۲۰۱۴ بدست آورد. دوستش دنیز به جای همه +ها، × و به جای همه ×ها، + قرار داد و او نیز حاصل را ۲۰۱۴ بدست آورد. آیا این اتفاق می‌تواند درست باشد؟ [۳ امتیاز]

۲. آیا این جمله درست است که هر چندضلعی محدب به‌وسیله یک خط راست قابل تقسیم به دو چندضلعی با محیط برابر است که

الف) طول بزرگترین ضلعشان برابر باشد. [۴ امتیاز]

ب) طول کوچکترین ضلعشان برابر باشد. [۴ امتیاز]

۳. پادشاه دو نابغه را فراخواند. او به نابغه اول دستور داد که ۱۰۰ عدد حقیقی مثبت (نه لزوماً متمایز) را روی ۱۰۰ کارت بنویسد (روی هر کارت یک عدد)، بدون اینکه آن‌ها را به نابغه دوم نشان دهد. نابغه دوم باید همه این اعداد را به درستی تشخیص دهد (برای مثال، اگر سه کارت با عدد ۵ وجود داشته باشد، نابغه دوم باید آن را تشخیص دهد) و در غیر این‌صورت هر دو نابغه سر خود را از دست می‌دهند. نابغه اول اجازه دارد یک لیست از اعداد متمایز را به نابغه دوم بدهد به‌طوری که هر کدام از اعداد این لیست باید یکی از اعداد روی کارت‌ها یا جمع تعدادی از این اعداد باشد. او اجازه ندارد که بگوید کدام عدد یکی از اعداد روی کارت‌ها است و کدام عدد مجموع چند عدد روی کارت‌ها است. هنگامی که او اعداد را روی کارت‌ها می‌نویسد، می‌داند که قرار است لیستی از اعداد را به نابغه دوم بدهد، ولی هیچ ارتباطی بین دو نابغه وجود ندارد. در نهایت پادشاه به تعداد اعداد در لیست داده شده به نابغه دوم، از ریش‌های هر کدام از نابغه‌ها می‌کَنَد. کمترین تعداد موهایی که هر نابغه باید از دست بدهد تا زنده بماند، چند تا است؟ [۶ امتیاز]

۴. در صفحه همه نقاط با مختصات صحیح (x,y)، $۰ \leq y \leq ۱۰$، علامت زده شده‌اند. یک چندجمله‌ای از درجه ۲۰ با ضرایب صحیح در نظر بگیرید. حداکثر تعداد نقاط علامت‌دار که می‌توانند روی نمودار این چندجمله‌ای قرار گیرند، چند تا است؟ [۷ امتیاز]

۵. یک مثلث غیر متساوی الساقین وجود دارد. پویا و بهرام بازی زیر را انجام می‌دهند. پویا در نوبتش یک نقطه در صفحه انتخاب می‌کند. بهرام در جواب، آن نقطه را با آبی یا قرمز رنگ می‌کند. پویا برنده می‌شود، اگر همه رئوس مثلثی متشابه با مثلث اولیه همرنگ باشند. کمترین تعداد حرکاتی که پویا باید انجام دهد تا بدون در نظر گرفتن نحوه بازی بهرام، برنده شود چند تا است (مستقل از شکل مثلث داده شده)؟ [۸ امتیاز]

۶. در یک کشور هر شهر یک شماره یکتا دارد. در یک کتاب راهنمای پرواز، برای هر دو شهر یک نشانه وجود دارد که مشخص می‌کند بین این دو شهر پرواز مستقیم وجود دارد یا نه. می‌دانیم که برای هر دو عدد نسبت داده شده M و N، می‌توان شماره‌گذاری شهرها را به‌گونه‌ای تغییر داد که شهر با شماره M، شماره N را بگیرد، اما کتاب راهنما هم‌چنان درست باشد.
آیا این همواره درست است که برای هر دو عدد نسبت داده شده M و N می‌توان شماره‌گذاری شهرها را به‌گونه‌ای تغییر داد که شماره شهرهای با شماره‌های M, N جابه‌جا شود، اما کتاب راهنما همچنان درست باشد؟ [۹ امتیاز]

۷. یک چندجمله‌ای $P(x)$ در نظر بگیرید به‌طوری که

$$P(۰) = ۱; \quad (P(x))^۲ = ۱ + x + x^{۱۰۰}Q(x),$$

که Q نیز یک چندجمله‌ای است. ثابت کنید در چندجمله‌ای $(P(x)+۱)^{۱۰۰}$، ضریب $x^{۹۹}$ برابر صفر است. [۱۰ امتیاز]

شماره گروه:

۲A

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2014

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۲

(The result is computed from the three problems with the highest scores, the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points problems

1. Doono wrote several 1s, placed signs "+" or "×" between every two of them, put several brackets
3 and got 2014 in the result. His friend Dunno replaced all "+" by "×" and all "×" by "+" and also got 2014. Can this be true?

2. Is it true that any convex polygon can be dissected by a straight line into two polygons with equal perimeters and
4 a) equal greatest sides?
4 b) equal smallest sides?

3. The King called two wizards. He ordered First Wizard to write down 100 positive real numbers (not necessarily distinct) on 100 cards (one number on each card) without revealing them to Second Wizard. The second wizard must surely determine all the numbers on the cards (for instance, if there are three cards with the number 5, the second wizard must determine this), otherwise both wizards will lose their heads. First Wizard is allowed to provide Second Wizard with a list of distinct numbers, each of which is either one of the numbers on the cards or a sum of some of
6 these numbers. He is not allowed to tell which numbers are on the cards and which numbers are their sums. When the first wizard writes the numbers on the cards, he already knows that then he will give the list of numbers for the second wizards. But there is no contact between wizards. Finally the King tears as many hairs from each wizard's beard as the number of real numbers in the list given to Second Wizard. What is the minimal number of hairs each wizard should lose to stay alive?

4. In the plane are marked all points with integer coordinates (x, y), $0 \le y \le 10$. Consider a
7 polynomial of degree 20 with integer coefficients. Find the maximal possible number of marked points which can lie on its graph.

5. There is a non-isosceles triangle. Peter and Basil play the following game. On each his turn Peter chooses a point in the plane. Basil responds by painting it into red or blue. Peter wins if some
8 triangle similar to the original one has all vertices of the same colour. Find the minimal number of moves Peter needs to win no matter how Basil would play (independently of the shape of the given triangle)?

6. In some country every town has a unique number. In a flight directory for any two towns there is an indication whether or not they are connected by a direct non-stop flight. It is known that for any two assigned numbers M and N one can change the numeration of towns so that the town
9 with number M gets the number N but the directory remains correct.
Is it always true that for any two assigned numbers M and N one can change the numeration of towns so that the towns with numbers M and N interchange their numbers but the directory is still correct?

7. Consider a polynomial $P(x)$ such that

10
$$P(0) = 1; \quad (P(x))^2 = 1 + x + x^{100}Q(x), \text{ where } Q(x) \text{ is also a polynomial.}$$

Prove that in the polynomial $(P(x) + 1)^{100}$ the coefficient at x^{99} is zero.