



(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

(۱) گنجی زیر یکی از خانه‌های صفحه‌ای 8×8 قرار دارد. زیر هر خانه دیگر، پیامی قرار دارد که حداقل قدم‌های لازم را برای رسیدن از این خانه به خانه گنج مشخص می‌کند. (برای حرکت از یک خانه به هر خانه مجاور (دارای ضلع مشترک)، یک قدم لازم است). حداقل تعداد خانه‌هایی را بیابید که لازم است حفاری شود تا با اطمینان به گنج رسید. [۳ امتیاز]

(۲) آیا عددی طبیعی وجود دارد که تعداد فردی مقسوم‌علیه زوج مثبت، و تعداد زوجی مقسوم‌علیه فرد مثبت داشته باشد؟ توجه: مجموعه مقسوم‌علیه‌های یک عدد طبیعی همواره شامل ۱ و خود عدد هست. [۴ امتیاز]

(۳) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داده شده است. دایره‌های محاطی مثلث‌های ABC و ADC به ترتیب در نقاط X و Y بر قطر AC مماس می‌شود. دایره‌های محاطی مثلث‌های BCD و BAD به ترتیب در نقاط Z و T بر قطر BD مماس می‌شود. ثابت کنید اگر نقاط X, Y, Z, T متمایز باشند، آن‌گاه رئوس یک مستطیل خواهند بود. [۴ امتیاز]

(۴) عبارت $1 \div 2 \div 3 \div 4 \div 5 \div 6 \div 7 \div 8 \div 9 \div 10$ به گونه‌ای پرانتزگذاری می‌شود که حاصل آن عددی صحیح شود.

الف) حداکثر مقدار عدد حاصل چیست؟ [۲ امتیاز]

ب) حداقل مقدار عدد حاصل چیست؟ [۳ امتیاز]

(۵) هر طرف پوست بدن کرگدنی تعدادی چین‌خوردگی افقی و عمودی دارد که روی هم ۱۷ تا است. اگر کرگدن یک طرف بدن خود را با درختی بخاراند، دو چین‌خوردگی افقی یا عمودی در این طرف ناپدید می‌شود، اما دو چین‌خوردگی، یکی افقی و یکی عمودی، در طرف دیگر بدنش پدید می‌آید. (اگر کم‌تر از دو چین‌خوردگی افقی و کم‌تر از دو چین‌خوردگی عمودی وجود داشته باشد، اتفاقی نمی‌افتد). آیا ممکن است پس از چندین بار که کرگدن دو طرف بدن خود را بخاراند، تعداد چین‌خوردگی‌های افقی و عمودی در هر طرف بدن کرگدن با هم عوض شود؟ [۵ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points problems

- 3 1. A treasure is buried under a square of the 8×8 board. Under each other square a message is placed, indicating the minimal number of steps needed to reach the square with the treasure. (To move from a square to any adjacent square (by side), one step is required). What is the minimal number of squares one needs to dig up in order to get to the treasure for sure?
- 4 2. Is there a positive integer such that it has an odd number of even positive divisors and an even number of odd positive divisors?
Remark: The set of the divisors of an integer always includes 1 and the integer itself.
- 4 3. Given a parallelogram $ABCD$. The incircles of triangles ABC and ADC touch diagonal AC at points X and Y respectively. The incircles of triangles BCD and BAD touch diagonal BD at points Z and T respectively. Prove that if points X, Y, Z, T are distinct then they are the vertices of a rectangle.
- 2 4. Brackets are placed in the expression $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$
so that the resulting number is integer. What is
a) the maximal possible value of this integer?
3 b) the minimal possible value of this integer?
- 5 5. Rhino's skin has vertical and horizontal folds on its sides, 17 in total. If Rhino scratches one of its sides against a tree, then either two horizontal or two vertical folds on this side disappear, but two folds, one horizontal and one vertical, appear on the other side. (If there are less than two horizontal folds and less than two vertical folds, then nothing happens.) Can it happen that the numbers of vertical and horizontal folds on each of Rhino's sides have been interchanged after Rhino scratched its sides several times?