شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2012

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۲)
اسفند ۱۳۹۰

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) هر رأس یک چندوجهی محدب دقیقاً سه یال دارد، و حداقل دو تا از آن‌ها با هم مساوی هستند. ثابت کنید که این چندوجهی حداقل سه یال مساوی دارد. [۴ امتیاز]

۲) روی نواری با $۲n$ خانه اعدادی مطابق شکل زیر نوشته شده‌اند:

$$۱,\ ۲,\ ۳,\ \ldots,\ n, -n,\ \ldots,\ -۲, -۱$$

مهره‌ای روی این نوار حرکت می‌کند. در هر بار، مهره به اندازه عدد خانه‌ای که در آن است جابه‌جا می‌شود (اگر عدد مثبت است به سمت راست، و اگر منفی است به سمت چپ). می‌دانیم با شروع از هر خانه، مهره از همه خانه‌های نوار عبور می‌کند. ثابت کنید عدد $۲n+۱$ اول است. [۴ امتیاز]

۳) نقاط برخورد نمودارهای $y=\cos\ x$ و $x=۱۰۰\ \cos(۱۰۰y)$ که هر دو مؤلفه آن‌ها اعدادی مثبت هستند، مشخص شده‌اند. فرض کنید a مجموع همه مؤلفه‌های X، و b مجموع همه مؤلفه‌های Y این نقاط باشد. مقدار a/b را بیابید. [۵ امتیاز]

۴) چهارضلعی $ABCD$ که هیچ دو ضلعی از آن با هم موازی نیستند در دایره‌ای محاط شده است. دو دایره که یکی از آن‌ها شامل وتر AB و دیگری شامل وتر CD است، در نقطه X بر هم مماس هستند. ثابت کنید همه این‌گونه نقاط (مثل X) بر یک دایره قرار دارند. [۵ امتیاز]

۵) یک رخ سفید در خانه $b۲$ و یک رخ سیاه در خانه $c۴$ صفحه شطرنجی ۸×۸ قرار دارند. هر یک از دو بازیکن به نوبت رخ خود را حرکت می‌دهند (حرکت اول با رخ سفید است). بازیکن‌ها مجاز نیستند که رخ خود را در خانه‌ای قرار دهند که توسط رخ دیگر تهدید می‌شود یا هر یک از دو رخ قبلاً در آن قرار داشته‌اند. بازیکنی که نتواند حرکت کند بازنده است. کدام بازیکن استراتژی برد دارد (برای هر روش بازی حریف)؟
(رخ به هر تعداد خانه در امتداد خطی افقی و یا عمودی می‌تواند جابه‌جا شود. فقط خانه ابتدا و انتهای هر حرکت به عنوان خانه‌ای که قبلا رخ در آن قرار داشته در نظر گرفته می‌شود). [۵ امتیاز]

(The result is computed from the three problems with the highest scores)

points problems

4 1. Each vertex of a convex polyhedron emits exactly three edges, and at least two of them are equal. Prove that the polyhedron has at least three equal edges.

4 2. Numbers are written in the cells of $2n$-stripe as shown

$$1, 2, 3, \dots, n, -n, \dots, -2, -1$$

A chip moves along the stripe: each time it moves by the number of cells indicated in the current cell (to the right if the number is positive, and to the left if it is negative). It is known that from any initial position the chip passes through all cells of the stripe. Prove that the integer $2n + 1$ is prime.

5 3. Points of intersection of the graphs $y = \cos x$ and $x = 100\cos(100\, y)$ that have both coordinates positive are marked. Let a be the sum of the X-coordinates and b be the sum of the Y-coordinates of these points. Find a/b.

5 4. A quadrilateral $ABCD$ with no parallel sides is inscribed into a circle. Let X be a point of tangency of two mutually touching circles, one with chord AB and another with chord CD. Prove that all such points X belong to the same circle.

5 5. A white rook is placed on the square $b2$, and a black rook is placed on the square $c4$ of a 8×8-chessboard. Each of two players in turns, moves his own rook (the first move is made by the white rook). The players are not allowed to move their rook to a square which is attacked by another rook or has been visited before by any rook. The player who cannot move looses the game. Which of the players has the winning strategy (for any moves of the other player)?
(A rook moves on any number of squares along a horizontal or a vertical line. Only initial and final squares of each move are regarded as visited).