



(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

- (۱) تعداد گلابی (زوج) به طوری در یک ردیف قرار داده شده‌اند که اختلاف جرم هر دو گلابی مجاور از یک گرم بیش تر نیست. نشان دهید که همواره می‌توان گلابی‌ها را در بسته‌های دو تایی گلابی قرار داد، و بسته‌ها را طوری در یک ردیف چید، که اختلاف جرم هر دو بسته مجاور از یک گرم بیش تر نباشد. [۴ امتیاز]
- (۲) ۱۰۰ نقطه در صفحه مشخص شده‌اند که هیچ سه تایی از آن‌ها روی یک خط نیستند. آیا همواره می‌توان که این نقطه‌ها را به جفت‌هایی چنان تقسیم کرد، و نقاط هر جفت را با یک پاره‌خط به هم متصل نمود، که همه پاره‌خط‌ها دو به دو با یکدیگر برخورد کنند؟ [۴ امتیاز]
- (۳) در تیمی از نگهبان‌ها، هر نگهبان رتبه‌ای مشخص دارد (که عددی است طبیعی). نگهبانی با رتبه N به مدت N روز موظف به خدمت بوده، و سپس به مدت N روز به مرخصی می‌رود، و دوباره به مدت N روز موظف به خدمت است، و به همین ترتیب. برای هر دو نگهبانی که در نظر بگیریم، نسبت رتبه بالاتر به رتبه کم‌تر حداقل ۳ است. آیا برای این تیم از نگهبان‌ها امکان دارد که در هر لحظه حداقل یک نگهبان موظف به خدمت باشد؟ (لزومی ندارد که نگهبان‌ها همه در یک روز خدمت خود را شروع کرده باشند). [۶ امتیاز]
- (۴) هر خانه از جدولی $n \times n$ با علامت «+» یا «-» پر شده است. در هر گام، می‌توان یک سطر یا ستون را انتخاب کرده و همه علامت‌های آن را برعکس کرد. اگر بدانیم که با شروع از چیدمان داده شده اولیه برای علامت‌ها، می‌توان بعد از تعدادی گام به جدولی رسید که فقط دارای علامت «+» باشد. ثابت کنید همواره می‌توان این کار را با تعداد گام‌هایی انجام داد که از n تجاوز نمی‌کند. [۶ امتیاز]
- (۵) فرض کنید p عددی اول باشد. مجموعه‌ای از $p+2$ عدد طبیعی را (که لزوماً متفاوت نیستند) جالب می‌نامیم، اگر مجموع هر p عدد از این مجموعه، مضربی از هر یک از دو عدد دیگر آن باشد. همه مجموعه‌های جالب را بیابید. [۸ امتیاز]
- (۶) بانکی یک میلیون مشتری دارد. هر مشتری دارای کد شناسایی یکتایی است که از شش رقم تشکیل شده است. دکتر کلاو لیست همه مشتری‌ها را در اختیار دارد. او می‌تواند به حساب هر مشتری نفوذ کند، اما نمی‌تواند دو بار به حساب یک مشتری نفوذ کند. پس از نفوذ، او به انتخاب خود به N رقم از کد شناسایی آن مشتری دسترسی پیدا می‌کند. او می‌تواند جای گاه ارقام متفاوتی را برای مشتری‌های مختلف انتخاب کند. هدف دکتر کلاو این است که کد شناسایی دشمنش، کارآگاه گجت، را (که یکی از مشتری‌ها نیز هست) به طور کامل بداند. کوچک‌ترین مقدار N را بیابید که حتماً دکتر کلاو بتواند به طور کامل کد شناسایی کارآگاه گجت را بداند. [۸ امتیاز]
- (۷) AH ارتفاعی از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است. فرض کنید I مرکز دایره محاطی مثلث ABH ، و نقاط L ، K و J به ترتیب مراکز دایره‌های محاطی مثلث‌های ABI ، BCI و CAI باشد. اندازه زاویه KJL را بیابید. [۸ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points problems

- 4 1. An even number of pears is placed in a row, so that the masses of any two neighbouring pears differ by no more than 1 gram. Show that one can always distribute the pears in packages, two pears per package, and arrange the packages in a row so that the masses of any two neighbouring packages differ by no more than 1 gram.
- 4 2. In the plane, 100 points are marked. No three points lie on the same line. Is it always possible to split these points into pairs and to connect the points in each pair by a line segment so that all segments pairwise intersect?
- 6 3. In a team of guards, each guard has a certain rank (a positive integer). A guard of rank N is on duty for N days, then he is off-duty for N days, again is on duty for N days and so on. For each two guards, the ratio of the senior rank to the junior rank is at least 3. Is it possible that in such a team of guards at each moment at least one guard is on duty? (The guards need not all start their duty on the same day).
- 6 4. Each entry of an $n \times n$ table is filled by either "+" or a "-". At each step, one can choose a row or a column and flip all signs in it. It is known that from the given initial position one can obtain the table consisting only of "+" in some number of steps. Prove that it can always be done in no more than n steps.
- 8 5. Let p be a prime number. A set of $p + 2$ positive integers (not necessarily distinct) is called interesting if the sum of any p of these integers is a multiple of each of two remaining integers. Find all interesting sets.
- 8 6. A bank has one million clients. Each client has his unique PIN-code consisting of six digits. Doctor Claw knows the list of all clients. He is able to break into account of each client but he cannot break twice into account of the same client. As result, he retrieves the digits of a client PIN-code on any N positions of his choice. Choice of positions could be different for different clients. The purpose of Doctor Claw is to learn the complete PIN-code of his adversary, Inspector Gadget (who is also a client). Find the smallest value of N for which Doctor Claw can learn the complete PIN-code of Inspector Gadget for sure.
- 8 7. Let AH be an altitude of an equilateral triangle ABC . Let I be the incenter of triangle ABH and let L, K and J be the incenters of triangles ABI, BCI and CAI respectively. Determine the value of angle KJL .