شماره گروه:

۲A

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2012

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۲)
اسفند ۱۳۹۰

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) در تیمی از نگهبان‌ها، هر نگهبان رتبه‌ای مشخص دارد (که عددی است طبیعی). نگهبانی با رتبه N به مدت N روز موظف به خدمت بوده، و سپس به مدت N روز به مرخصی می‌رود، و دوباره به مدت N روز موظف به خدمت است، و به همین ترتیب. برای هر دو نگهبانی که در نظر بگیریم، نسبت رتبه بالاتر به رتبه کم‌تر حداقل ۳ است. آیا برای این تیم از نگهبان‌ها امکان دارد که در هر لحظه حداقل یک نگهبان موظف به خدمت باشد؟ (لزومی ندارد که نگهبان‌ها همه در یک روز خدمت خود را شروع کرده باشند). [۴ امتیاز]

۲) در داخل دایره‌ای ۱۰۰ نقطه مشخص شده‌اند و هیچ سه تایی از آن‌ها روی یک خط مستقیم قرار ندارند. ثابت کنید می‌توان این نقاط را به جفت‌هایی تقسیم کرد، به طوری که همه نقاط برخورد ۵۰ خطی که از این ۵۰ جفت نقطه می‌گذرند، در داخل این دایره باشد. [۵ امتیاز]

۳) فرض کنید n عددی طبیعی است. ثابت کنید اعداد صحیح $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n وجود دارند به طوری که برای هر عدد صحیح x، عدد

$$\left(\dots\left(\left(x^۲+a_۱\right)^۲+a_۲\right)^۲+\dots+a_{n-۱}\right)^۲+a_n$$

بر $۲n-۱$ بخش‌پذیر است. [۶ امتیاز]

۴) علی شش نقطه را روی مکعب واحد مشخص کرد، به طوری که روی هر وجه یک نقطه قرار دارد. سپس هر دو نقطه را که روی دو وجه مجاور بودند، با یک پاره‌خط به هم متصل کرد. در نهایت او مجموع طول این پاره‌خط‌ها را حساب کرد. ثابت کنید عددی که او به دست آورد، از $۶\sqrt{۲}$ کم‌تر نیست. [۶ امتیاز]

۵) خط l بر دایره محاطی مثلث ABC مماس است. فرض کنید خطوط l_a، l_b، l_c قرینه خط l نسبت به نیم‌سازهای زوایای خارجی مثلث ABC باشد. ثابت کنید مثلثی که توسط این خطوط به وجود می‌آید، با مثلث ABC همنهشت است. [۸ امتیاز]

۶) الف) در یک دنباله نامتناهی از مستطیل‌ها، برای هر عدد n، مساحت مستطیل nام برابر $n^۲$ است. آیا همواره ممکن است که صفحه توسط آن‌ها پوشیده شود؟ (روی هم قرار گرفتن مجاز است). [۳ امتیاز]

ب) دنباله‌ای نامتناهی از مربع‌ها داده شده، به طوری که برای عدد N، مربع‌هایی با مجموع مساحت بیش‌تر از N وجود دارند. آیا لزوماً می‌توان صفحه را توسط آن‌ها پوشاند؟ (روی هم قرار گرفتن مجاز است). [۶ امتیاز]

۷) کاوه بسته‌ای از ۱۰۰ سنگ دارد. در هر حرکت، او یک بسته را انتخاب کرده و آن را به دو بسته کوچک‌تر تقسیم می‌کند، تا جایی که ۱۰۰ بسته که هر یک فقط یک سنگ دارند به دست آید. ثابت کنید:

الف) موقعی می‌رسد که از میان بسته‌ها، ۳۰ بسته هست که روی هم ۶۰ سنگ دارد. [۶ امتیاز]

ب) موقعی می‌رسد که از میان بسته‌ها، ۲۰ بسته هست که روی هم ۶۰ سنگ دارد. [۳ امتیاز]

ج) کاوه می‌تواند طوری این کار را بکند که هیچ‌گاه ۱۹ بسته نباشد که روی هم ۶۰ سنگ داشته باشند. [۳ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Spring 2012

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۲)
اسفند ۱۳۹۰

(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

Points Problems

4 1. In a team of guards, each guard has a certain rank (a positive integer). A guard of rank N is on duty for N days, then he is off-duty for N days, again is on duty for N days and so on. For each two guards, the ratio of the senior rank to the junior rank is at least 3. Is it possible that in such a team of guards at each moment at least one guard is on duty? (The guards need not all start their duty on the same day).

5 2. Inside a given circle 100 points are marked. No three of them lie on the same straight line. Prove that it is possible to split the points into pairs in such a way, that all 50 lines drawn through each of 50 pairs have their intersection points inside this circle.

6 3. Let n be a positive integer. Prove that there exist integers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that for any integer x the number
$$(\ldots((x^2+a_1)^2)+a_2)^2+\cdots+a_{n-1})^2+a_n$$
is divisible by $2n-1$.

6 4. Alex marked six points on unit cube, one point inside each face. Then he connected by segments any two marked points on neighbouring faces. Finally, he calculated the total sum of lengths of these segments. Prove that the number he got was no less than $6\sqrt{2}$.

8 5. Let line l be a tangent to the incircle of triangle ABC. Let l_a, l_b, l_c be the lines symmetrical to l about the bisectors of exterior angles of triangle ABC. Prove that the triangle formed by these lines is congruent to triangle ABC.

6.

3 a) In an infinite sequence of rectangles the area of n-th rectangle equals n^2 for each n. Is it always possible to cover the plane by them? Overlapping is allowed.

6 b) Given an infinite sequence of squares such that for any number N there exist squares of total area greater than N. Is it necessarily possible to cover the plane by them? Overlapping is allowed.

7. Konstantin has a pile of 100 stones. At each move he chooses a pile and splits it into two smaller ones until he gets 100 piles of a single stone each. Prove that

6 a) at some moment among the piles there will be 30 piles containing 60 stones in total;

3 b) at some moment among the piles there will be 20 piles containing 60 stones in total;

3 c) Konstantin could proceed so that at no moment he will have 19 piles containing 60 stones in total.