شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2013

خانه ریاضیات اصفهان

مسابقه تیمی (سطح عادی ۱)

اسفند ۱۳۹۱

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) شش نقطه روی صفحه قرار دارند به گونه‌ای که می‌توان آن‌ها را به دو دسته سه‌تایی تقسیم کرد که هر دسته یک مثلث تشکیل دهد. آیا همواره می‌توان این نقاط را به دو دسته سه‌تایی تقسیم کرد که تشکیل دو مثلث بدهند که هیچ نقطه‌ی مشترکی (نه در درون و نه روی مرز) نداشته باشند. [۳ امتیاز]

۲) عدد طبیعی A داده شده است. دو عملیات مجاز است: افزایش این عدد به اندازه‌ی ۹، و حذف یک رقم برابر با ۱ از هر جایگاهی در این عدد. آیا همواره می‌توان با چند بار تکرار این عملیات به عدد $A+۱$ رسید؟

(توجه: اگر رقم اول از سمت چپ یک باشد و حذف شود، تمام صفرهای بعد از آن نیز تا رسیدن به رقمی غیرصفر حذف می‌شود.) [۴ امتیاز]

۳) وزن هر یک از یازده وزنه بر حسب گرم عددی طبیعی است و هیچ دو وزنه‌ای هم‌وزن نیستند. می‌دانیم که همواره اگر همه‌ی این وزنه‌ها یا گروهی از آن‌ها را در کفه‌های یک ترازو قرار دهیم، طرفی که تعداد بیش‌تری وزنه دارد سنگین‌تر است. ثابت کنید که حداقل یکی از وزنه‌ها سنگین‌تر از ۳۵ گرم است. [۴ امتیاز]

۴) هشت رخ روی صفحه‌ی شطرنجی ۸ × ۸ به طوری قرار دارند که هیچ دو تایی از آن‌ها یکدیگر را تهدید نمی‌کنند. همه‌ی خانه‌های صفحه‌ی شطرنج طبق قوانین بعدی به رخ‌ها اختصاص می‌یابد: خانه‌ای که هر رخ در آن است به آن رخ اختصاص دارد. اگر یک خانه توسط دو رخ تهدید شود، به رخی تعلق می‌گیرد که به آن خانه نزدیک‌تر است؛ در شرایطی که این دو رخ به فاصله‌ی یکسانی از آن خانه باشند، به هر یک از این رخ‌ها مالکیت نیمی از آن خانه اختصاص می‌یابد. ثابت کنید همه‌ی رخ‌ها مالک مساحت یکسانی خواهند شد. [۵ امتیاز]

۵) در چهارضلعی $ABCD$ زاویه‌ی B برابر ‎۱۵۰°‎، زاویه‌ی C قائمه است و ضلع‌های AB و CD برابرند. زاویه‌ی بین BC و خط متصل‌کننده نقاط میانی BC و AD را تعیین کنید. [۵ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2013

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۱)
اسفند ۱۳۹۱

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
3	1. There are six points on the plane such that one can split them into two triples each creating a triangle. Is it always possible to split these points into two triples creating two triangles with no common point (neither inside, nor on the boundary)?
4	2. There is a positive integer A. Two operations are allowed: increasing this number by 9 and deleting a digit equal to 1 from any position. Is it always possible to obtain $A+1$ by applying these operations several times? (Remark. If leading digit 1 is deleted, all leading zeros are deleted as well.)
4	3. Each of 11 weights is weighting an integer number of grams. No two weights are equal. It is known that if all these weights or any group of them are placed on a balance then the side with a larger number of weights is always heavier. Prove that at least one weight is heavier than 35 grams.
5	4. Eight rooks are placed on a 8×8 chessboard, so that no two rooks attack one another. All squares of the board are divided between the rooks as follows. A square where a rook is placed belongs to it. If a square is attacked by two rooks then it belongs to the nearest rook; in case these two rooks are equidistant from this square, each of them possesses a half of the square. Prove that every rook possesses an equal area.
5	5. In a quadrilateral $ABCD$, angle B is equal to 150°, angle C is right, and sides AB and CD are equal. Determine the angle between BC and the line connecting the midpoints of sides BC and AD.