شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2013

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۲)
اسفند ۱۳۹۱

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) عدد طبیعی A داده شده است. دو عملیات مجاز است: افزایش این عدد به اندازه‌ی ۹، و حذف یک رقم برابر با ۱ از هر جایگاهی در این عدد. آیا همواره می‌توان با چند بار تکرار این عملیات به عدد $A+۱$ رسید؟
(توجه: اگر رقم اول از سمت چپ یک باشد و حذف شود، تمام صفرهای بعد از آن نیز تا رسیدن به رقمی غیرصفر حذف می‌شود.) [۳ امتیاز]

۲) زاویه‌ی C در مثلث ABC قائمه است. روی اضلاع AC و BC مربع‌های $ACKL$ و $BCMN$ در بیرون مثلث ساخته می‌شود. اگر CE ارتفاع مثلث باشد، ثابت کنید زاویه‌ی LEM قائمه است. [۴ امتیاز]

۳) هشت رخ روی صفحه‌ی شطرنجی ۸ × ۸ به طوری قرار دارند که هیچ دو تایی از آن‌ها یکدیگر را تهدید نمی‌کنند. همه‌ی خانه‌های صفحه‌ی شطرنج طبق قوانین بعدی به رخ‌ها اختصاص می‌یابد: خانه‌ای که هر رخ در آن است به آن رخ اختصاص دارد. اگر یک خانه توسط دو رخ تهدید شود، به رخی تعلق می‌گیرد که به آن خانه نزدیک‌تر است؛ در شرایطی که این دو رخ به فاصله‌ی یکسانی از آن خانه باشند، به هر یک از این رخ‌ها مالکیت نیمی از آن خانه اختصاص می‌یابد. ثابت کنید همه‌ی رخ‌ها مالک مساحت یکسانی خواهند شد. [۴ امتیاز]

۴) هر یک از ۱۰۰ سنگ برچسبی دارد که وزن واقعی آن را نشان می‌دهد. هیچ دو سنگی هم‌وزن نیستند. جمشید بازی‌گوش می‌خواهد برچسب‌ها را طوری جابه‌جا کند که مجموع اعداد روی برچسب‌ها برای هر گروه ۱ تا ۹۹ عضوی عددی غیر از وزن واقعی آن گروه باشد. آیا این کار همواره امکان‌پذیر است؟ [۴ امتیاز]

۵) یک معادله‌ی درجه دوم با ضرایب صحیح «*مجاز*» نامیده می‌شود هرگاه ضریب جمله‌ی با توان دو در آن برابر یک باشد، ریشه‌های آن اعدادی صحیح باشند و قدرمطلق ضرایب آن از ۲۰۱۳ تجاوز نکند. بهرام همه‌ی معادله‌های درجه‌ی دوم مجاز را با هم جمع کرده است. ثابت کنید که معادله‌ی درجه دوم حاصل ریشه‌ی حقیقی ندارد. [۵ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2013

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۲)
اسفند ۱۳۹۱

(The result is computed from the three problems with the highest scores)

points	problems
3	1. There is a positive integer A. Two operations are allowed: increasing this number by 9 and deleting a digit equal to 1 from any position. Is it always possible to obtain $A+1$ by applying these operations several times? (Remark. If leading digit 1 is deleted, all leading zeros are deleted as well.)
4	2. Let C be a right angle in triangle ABC. On legs AC and BC the squares $ACKL$, $BCMN$ are constructed outside the triangle. If CE is an altitude of the triangle prove that LEM is a right angle.
4	3. Eight rooks are placed on a 8×8 chessboard, so that no two rooks attack one another. All squares of the board are divided between the rooks as follows. A square where a rook is placed belongs to it. If a square is attacked by two rooks then it belongs to the nearest rook; in case these two rooks are equidistant from this square, each of them possesses a half of the square. Prove that every rook possesses an equal area.
4	4. Each of 100 stones has a sticker showing its true weight. No two stones weight the same. Mischievous Greg wants to rearrange stickers so that the sum of the numbers on the stickers for any group containing from 1 to 99 stones is different from the true weight of this group. Is it always possible?
5	5. A quadratic trinomial with integer coefficients is called *admissible* if its leading coefficient is 1, its roots are integers and the absolute values of coefficients do not exceed 2013. Basil has summed up all admissible quadratic trinomials. Prove that the resulting trinomial has no real roots.