شماره گروه:

۱A

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2013

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۱

(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید)

۱) تعدادی عدد طبیعی روی تخته‌سیاهی نوشته شده‌اند که مجموع هر دو تا از آن‌ها توانی طبیعی از عدد دو است (برای مثال ۲، ۴، ۸، ...). حداکثر تعداد ممکن اعداد طبیعی متفاوتی که روی تخته‌سیاه نوشته شده چند تا است؟ [۴ امتیاز]

۲) بیست بچه، ده پسر و ده دختر، روی یک خط ایستاده‌اند. هر پسر تعداد بچه‌هایی را که سمت راست او ایستاده‌اند می‌شمارد و هر دختر تعداد بچه‌هایی را که در سمت چپ او ایستاده‌اند می‌شمارد. ثابت کنید مجموع اعداد شمرده شده توسط پسران با مجموع اعداد شمرده شده توسط دختران برابر است. [۴ امتیاز]

۳) آیا ممکن است برخی خانه‌های ۱×۱ از جدولی ۱۹×۱۹ نشانه‌گذاری شود، به طوری که هر مربع ۱۰×۱۰ دارای تعداد متفاوتی از خانه‌های نشانه‌گذاری شده باشد؟ [۵ امتیاز]

۴) روی یک دایره ۱۰۰۰ عدد حقیقی غیرصفر یک در میان با سفید و سیاه رنگ‌آمیزی شده‌اند. هر عدد سیاه برابر با مجموع دو عدد سفید همسایه‌ی آن است، و هر عدد سفید برابر با حاصل‌ضرب دو عدد سیاه همسایه‌ی آن است. مجموع این هزار عدد چه اعدادی می‌تواند باشد؟ [۵ امتیاز]

۵) یک نقطه روی صفحه «گره» نامیده می‌شود اگر هر دو مولفه‌ی مختصات آن عددی صحیح باشد. مثلثی با رأس‌هایی در گره‌ها در نظر بگیرید که دقیقاً دو گره درون آن واقع شده است. ثابت کنید خط راستی که این دو گره را به هم متصل می‌کند یا از یک رأس عبور می‌کند و یا موازی ضلعی از مثلث است. [۶ امتیاز]

۶) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC، نقطه‌ی I مرکز دایره محاطی و نقاط A_0 و B_0 به ترتیب نقاط تماس دایره محاطی با ساق‌های AC و BC است.
عمودی که از A_0 به AI رسم می‌شود با عمودی که از B_0 به BI رسم می‌شود در نقطه‌ی P برخورد می‌کند. ثابت کنید خطوط CP و AB بر یکدیگر عمود هستند. [۸ امتیاز]

۷) دو تیم A و B در یک تورنمنت دانش‌آموزی تنیس روی میز شرکت می‌کنند. تیم A از m دانش‌آموز و تیم B از n دانش‌آموز تشکیل شده که $m \neq n$.
فقط یک میز برای بازی وجود دارد و تورنمنت به این صورت برگزار می‌شود که دو دانش‌آموز از دو تیم مختلف شروع به بازی می‌کنند و سایر دانش‌آموزان یک صف تشکیل می‌دهند و منتظر می‌مانند تا نوبت بازی به آن‌ها برسد. بعد از هر بازی، نفر اول در صف جای‌گزین هم‌تیمی خودش کنار میز می‌شود و با بازیکن قبلی کنار میز بازی می‌کند، و بازیکن جای‌گزین شده به انتهای صف می‌رود. ثابت کنید که هر دو بازیکن از دو تیم مقابل هم، سرانجام با هم بازی خواهند کرد. [۹ امتیاز]

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Spring 2013

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۱

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
4	1. Several positive integers are written on a blackboard. The sum of any two of them is a positive integer power of two (for example, $2,4,8,\ldots$). What is the maximal possible number of different integers on the blackboard?
4	2. Twenty children, ten boys and ten girls, were standing in a line. Each boy counted the number of children standing to the right of him. Each girl counted the number of children standing to the left of her. Prove that the sums of numbers counted by the boys and the girls are the same.
5	3. There is a 19×19 board. Is it possible to mark some 1×1 squares so that each of 10×10 squares contains different number of marked squares?
5	4. On a circle, there are 1000 nonzero real numbers painted black and white in turn. Each black number is equal to the sum of two white numbers adjacent to it, and each white number is equal to the product of two black numbers adjacent to it. What are the possible values of the total sum of 1000 numbers?
6	5. A point in the plane is called a node if both its coordinates are integers. Consider a triangle with vertices at nodes containing exactly two nodes inside. Prove that the straight line connecting these nodes either passes through a vertex or is parallel to a side of the triangle.
8	6. Let ABC be a right-angled triangle, I its incenter and B_0, A_0 points of tangency of the incircle with the legs AC and BC respectively. Let the perpendicular dropped to AI from A_0 and the perpendicular dropped to BI from B_0 meet at point P. Prove that the lines CP and AB are perpendicular.
9	7. Two teams A and B play a school ping pong tournament. The team A consists of m students, and the team B consists of n students where $m \neq n$. There is only one ping pong table to play and the tournament is organized as follows. Two students from different teams start to play while other players form a line waiting for their turn to play. After each game the first player in the line replaces the member of the same team at the table and plays with the remaining player. The replaced player then goes to the end of the line. Prove that every two players from the opposite teams will eventually play against each other.