



(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید)

- (۱) تعدادی عدد طبیعی روی تخته سیاهی نوشته شده‌اند که مجموع هر دو تا از آن‌ها توانی طبیعی از عدد دو است (برای مثال ۲، ۴، ۸، ...). حداقل تعداد ممکن برای اعداد متفاوتی که روی تخته سیاه نوشته شده چند تا است؟ [۳ امتیاز]
- (۲) یک پسر و یک دختر روی یک نیمکت دراز نشسته‌اند. سپس بیست دانش آموز دیگر یکی پس از دیگری می‌آیند که روی نیمکت بنشینند، و هر کدام در جایی بین بچه‌هایی که نشسته‌اند می‌نشینند. یک دختر بچه را شجاع می‌نامیم اگر بین دو پسر بچه بنشیند، و یک پسر بچه را شجاع می‌نامیم اگر بین دو دختر بچه بنشیند. در نهایت چنین شده است که دختر بچه‌ها و پسر بچه‌ها یکی در میان قرار گرفته‌اند. آیا می‌توان به طور یکتا تعداد بچه‌های شجاع را تعیین کرد؟ [۴ امتیاز]
- (۳) یک نقطه روی صفحه «گره» نامیده می‌شود اگر هر دو مولفه‌ی مختصات آن عددی صحیح باشد. مثلثی با رأس‌هایی در گره‌ها در نظر بگیرید که حداقل دو گره درون آن قرار دارد. ثابت کنید دو گره‌ی درونی وجود دارد که خط راستی که این دو را به هم متصل می‌کند یا از یک رأس عبور می‌کند و یا موازی ضلعی از مثلث است. [۶ امتیاز]
- (۴) اعداد طبیعی ۱، ۲، ...، ۱۰۰ روی یک دایره (نه لزوماً به ترتیب) نوشته شده‌اند. آیا ممکن است که قدرمطلق اختلاف بین هر دو عدد کنار هم حداقل ۳۰ و حداکثر ۵۰ باشد؟ [۶ امتیاز]
- (۵) روی یک صفحه که در ابتدا بدون رنگ آمیزی است سه نقطه انتخاب شده و به رنگ‌های قرمز، آبی و زرد رنگ شده‌اند. در هر گام دو نقطه با رنگ‌های مختلف انتخاب می‌شوند. سپس نقطه‌ای با رنگ سوم رنگ آمیزی می‌شود، به گونه‌ای که این سه نقطه تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع بدهند و رأس‌های آن در جهت عقربه‌های ساعت با «قرمز، آبی، زرد» رنگ آمیزی شده باشند. نقطه‌ای که قبلاً رنگ آمیزی شده می‌تواند دوباره رنگ شود، و ممکن است دارای رنگ‌های مختلف بشود. ثابت کنید بعد از هر تعداد حرکت، همه‌ی نقاطی که هم‌رنگ هستند روی یک خط قرار دارند. [۷ امتیاز]
- (۶) پنج عدد حقیقی مثبت متفاوت داریم. می‌دانیم که مجموع مربعات آن‌ها با مجموع ده عدد حاصل از ضرب دو به دو آن‌ها برابر است. الف) ثابت کنید می‌توانیم سه عدد انتخاب کنیم که نمی‌توان مثلثی با طول اضلاعی برابر با این اعداد تشکیل داد. [۴ امتیاز]  
ب) ثابت کنید تعداد چنین سه‌تایی‌هایی حداقل برابر شش است (سه‌تایی‌هایی که شامل اعداد مشابه با ترتیب مختلف باشند یکسان در نظر گرفته می‌شوند). [۵ امتیاز]
- (۷) پادشاه تصمیم گرفته است که انجمن مشاورانش را که از هزار نابغه تشکیل شده کوچک کند. او آن‌ها را در یک خط قرار داده و بر سر آن‌ها کلاه‌هایی قرار داده است که اعداد ۱ تا ۱۰۰۱ روی آن‌ها، نه لزوماً به ترتیب، نوشته شده (یک کلاه مخفی گردیده است). هر نابغه شماره‌های روی کلاه‌های همه‌ی افراد جلوی خود را می‌بیند اما شماره کلاه خود و افراد پشت سر خود را نمی‌بیند. با دستور شاه، با شروع از انتهای صف، هر نابغه یک عدد بین ۱ تا ۱۰۰۱ را می‌گوید به طوری که همه نابغه‌های دیگر آن را می‌شنوند. هیچ عددی نمی‌تواند دو بار تکرار شود. در نهایت هر نابغه‌ای که نتواند عدد روی کلاه خود را بگوید از انجمن حذف می‌شود. نابغه‌ها شرایط این آزمون را می‌دانند و می‌توانند تدبیرات لازم را در مورد استراتژی خود قبل از آزمون داشته باشند.  
الف) آیا نابغه‌ها می‌توانند یک استراتژی طراحی کنند که ضمانت کند بیش از ۵۰۰ نفر از آن‌ها در انجمن باقی می‌مانند؟ [۵ امتیاز]  
ب) آیا نابغه‌ها می‌توانند یک استراتژی طراحی کنند که ضمانت کند حداقل ۹۹۹ نفر از آن‌ها در انجمن باقی می‌مانند؟ [۷ امتیاز]



(The result is computed from the three problems with the highest scores; the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

Points	Problems
3	1. Several positive integers are written on a blackboard. The sum of any two of them is a positive integer power of two (for example, 2,4,8, ...). What is the maximal possible number of different integers on the blackboard?
4	2. A boy and a girl were sitting on a long bench. Then twenty more children one after another came to sit on the bench, each taking a place between already sitting children. Let us call a girl brave if she sat down between two boys, and let us call a boy brave if he sat down between two girls. It happened, that in the end all girls and boys were sitting in the alternating order. Is it possible to uniquely determine the number of brave children?
6	3. A point in the plane is called a node if both its coordinates are integers. Consider a triangle with vertices at nodes containing at least two nodes inside. Prove that there exists a pair of internal nodes such that a straight line connecting them either passes through a vertex or is parallel to side of the triangle.
6	4. Integers $1, 2, \dots, 100$ are written on a circle, not necessarily in that order. Can it be that the absolute value of the difference between any two adjacent integers is at least 30 and at most 50?
7	5. On an initially colorless plane three points are chosen and marked in red, blue and yellow. At each step two points marked in different colors are chosen. Then one more point is painted in the third color so that these three points form a regular triangle with the vertices colored clockwise in "red, blue, yellow". A point already marked may be marked again so that it may have several colors. Prove that for any number of moves all the points containing the same color lie on the same line.
4	6. There are five distinct real positive numbers. It is known that the total sum of squares and the total sum of ten pairwise products of these numbers are equal.
5	a) Prove that we can choose three numbers such that it would not be possible to make a triangle with sides' lengths equal to these numbers. b) Prove that the number of such triples is at least six (triples which consist of the same numbers in different order are considered the same).
7	7. The King decided to reduce his Council consisting of thousand wizards. He placed them in a line and placed hats with numbers from 1 to 1001 on their heads not necessarily in this order (one hat was hidden). Each wizard can see the numbers on the hats of all those before him but not on himself or on anyone who stayed behind him. By King's command, starting from the end of the line each wizard calls one integer from 1 to 1001 so that every wizard in the line can hear it. No number can be repeated twice. In the end each wizard who fails to call the number on his hat is removed from the Council. The wizards knew the conditions of testing and could work out their strategy prior to it.
5	a) Can the wizards work out a strategy which guarantees that more than 500 of them remain in the Council?
7	b) Can the wizards work out a strategy which guarantees that at least 999 of them remain in the Council?