



به نام آنکه هستی نام از او یافت

مرحله اول مسابقات تورنمنت شهرها سطح ۲ (بهمن ۹۴)

ناحیه ۳

دانش آموزان عزیز! از هفت سؤالی که در اختیار شما قرار گرفته، فقط به پنج سؤال جواب دهید.

۱- پنجره ای به شکل مستطیل با نیم دایره ای در بالای آن داریم که محیط آن برابر P است. طول و عرض مستطیل را بر حسب P ، چگونه انتخاب کنیم تا حراکثر و شنایی را از خود عبور دهد.

(امتیاز: ۳)

۲- طول اقطار دوزنقه ای ۱۳ و ۱۵ و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. مساحت این دوزنقه چقدر است؟

(امتیاز: ۳)

۳- چند عدد در مجموعه اعداد طبیعی $\{1377, 1378, \dots, 1399\}$ وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند.

(امتیاز: ۴)

۴- فرض کنید که x و y دو عدد حقیقی باشند که $0 < y < x$ ثابت کنید.

$$\frac{x^4 - y^4}{4x^3} < x - y < \frac{x^4 - y^4}{4y^3}$$

(امتیاز: ۴)

۵- چند دنباله a_1, a_2, \dots, a_{13} از اعداد ۱ تا ۱۳ وجود دارد که هر عدد دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده باشد و نیز a_i از a_{3i-1} و a_{3i} و a_{3i+1} کوچکتر باشد.

(امتیاز: ۵)

۶- اگر x و y دو عدد طبیعی باشند بطوریکه داشته باشیم $3x^2 + x = 4y^2 + y$ ، آنگاه ثابت کنید که $x - y$ یک مربع کامل است.

(امتیاز: ۵)

۷- مثلث متساوی الاضلاع MNP در مثلث متساوی الاضلاع ABC محاط شده است به طوری که $NP \perp BC$. نسبت

مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

(امتیاز: ۵)

سلامت و شادمانی