



به نام آنکه هستی نام از او یافت

مرحله اول مسابقات تورنمنت شهرها سطح ۲ (بهمن ۹۴)

نواحی ۱، ۲ و ۶

دانش آموزان عزیز! از هفت سؤالی که در اختیار شما قرار گرفته، فقط به پنج سؤال جواب دهید.

\*\*\*\*\*

۱- به ازای چند عدد طبیعی  $m$  حاصل  $\sqrt{m-1} + \sqrt{m+15}$  عدد صحیح است.

(امتیاز: ۳)

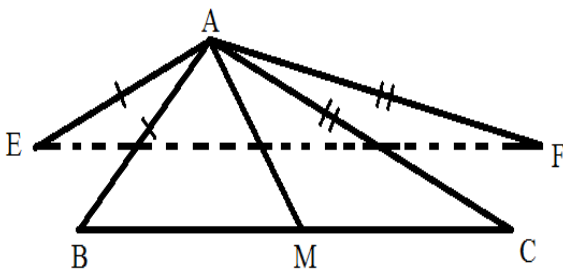
۲- چند عدد ۵ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ وجود دارد که ارقام آن متمایز باشد و مجموع رقم اول و رقم پنجم با مجموع رقم دوم و رقم چهارم آن برابر باشد.

(امتیاز: ۳)

۳- فرض کنید  $A = \{1, 2, \dots, 10\}$  به طوریکه  $1 < l \leq 10$  و  $l \in A$ ، در چند زیرمجموعه  $A$ ، عدد  $l$  بزرگترین عضو است؟

(امتیاز: ۳)

۴- در شکل زیر  $AE = AB$  و  $AF = AC$  و  $BM = MC$  و  $\hat{B} + \hat{C} = \hat{EAF}$  ثابت کنید  $EF = 2AM$ .



(امتیاز: ۵)

۵- سهمی  $y = x^2 - 2ax + 1$  و خط  $y = 2b(a - x)$  را در نظر بگیرید. مجموعه  $A$  را به صورت  $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{خط و سهمی یکدیگر را قطع نمی کنند}\}$  تعریف می کنیم. مساحت ناحیه  $A$  را بیابید.

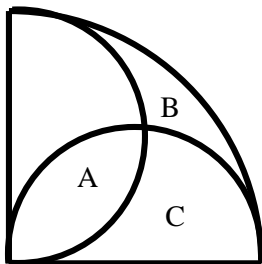
(امتیاز: ۵)

۶- می دانیم هر زیرمجموعه غیر تهی از اعداد طبیعی دارای کوچکترین عضو است (اصل خوش ترتیبی). به کمک اصل خوش ترتیبی و برهان خلف ثابت کنید معادله زیر در  $\mathbb{N}$  جواب ندارد. ( $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ )

$$8a^4 + 4b^4 + 2c^4 = d^4$$

(امتیاز: ۵)

۷- شکل زیر با دو نیم دایره به شعاع ۲ و یک ربع دایره به شعاع  $2\sqrt{2}$  ساخته شده است. نسبت مساحت شکل A به مساحت شکل B چقدر است؟ اگر مساحت شکل C برابر ۲۵ واحد مربع باشد، محیط شکل های A و B را بیابید.



(امتیاز: ۵)

سلامت و شاد باشید