شماره گروه:

A ۱

39th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Fall 2017

خانه ریاضیات
مسابقه سطح پیشرفته ۱
مهر ۱۳۹۶

لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.

برای گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس نهم یا دهم هستند.

۱. یک وزنه فلزی به وزن ۶ کیلوگرم، و به میزان نامحدود کیسه های بدون وزن و شکر داریم. هم چنین یک ترازوی دوکفه ای وجود دارد که تراز می شود هرگاه نسبت وزن کفه چپ به وزن کفه راست، ۳ به ۴ باشد. در هربار وزن کشی، می توانید هر تعداد وزنه آماده شده در قبل را روی ترازو بگذارید و سپس یک کیسه شکر به یکی از کفه ها اضافه کنید تا کفه ها تراز شوند. بعد از آن می توانید از این کیسه شکر در وزن کشی های بعدی استفاده کنید. آیا می توان با این روش یک کیسه شکر یک کیلوگرمی درست کرد؟ [۴ امتیاز]

۲. دو سکه با شعاع ۱ سانتی متر، دو سکه با شعاع ۲ سانتی متر و دو سکه با شعاع ۳ سانتی متر داریم. می توانید دو تا از سکه ها روی میز قرار دهید به طوری که مماس باشند و در هر نوبت یک سکه را اضافه کنید بطوری که سکه جدید اضافه شده با حداقل دو سکه قبلی مماس باشد. سکه جدید نمی تواند روی سکه های قبلی قرار بگیرد. آیا می توانید چند سکه روی میز قرار دهید بطوری که حتماً مرکز سه تا از آنها هم خط (روی یک خط) باشد؟ [۴ امتیاز]

۳. یک تحلیلگر میزان تغییر نرخ دلار به تومان را برای هر کدام از سه ماه آینده پیش بینی کرده است، یعنی گفته است که نرخ با چه درصدی (بیش از صفر درصد و کمتر از صد درصد) در تیر، مرداد و شهریور تغییر خواهد کرد. معلوم شده که او نرخ هر ماه را درست پیش بینی کرده اما بالا و پایین رفتن را اشتباه تشخیص داده (یعنی اگر پیش بینی کرده که نرخ x درصد کاهش می یابد، در واقعیت نرخ x درصد افزایش یافته و برعکس). با این وجود، نرخ دلار به تومان بعد از سه ماه دقیقاً منطبق بر پیش بینی او است. در مجموع نرخ دلار به تومان بالا رفته یا پایین آمده است؟ [۶ امتیاز]

۴. ۱۰۰ درب وجود دارد که هر کدام کلید خودشان را دارد (کلید هر درب فقط همان درب را باز می کند). درب ها و کلید ها از ۱ تا ۱۰۰ شماره گذاری شده اند. می دانیم که اختلاف شماره هر درب و شماره کلیدی که آن درب را باز می کند، حداکثر برابر یک است. در هر بار تلاش می توانید هر درب و هر کلیدی که خواستید را انتخاب کنید و چک کنید که آیا کلید انتخاب شده، درب انتخاب شده را باز می کند یا نه. آیا همواره می توان فهمید کدام کلید کدام درب را باز می کند،

الف) با ۹۹ بار تلاش؛ [۱ امتیاز]

ب) با ۷۵ بار تلاش؛ [۳ امتیاز]

ج) با ۷۴ بار تلاش؟ [۴ امتیاز]

۵. ارقام یک عدد صحیح مثبت $n > ۱$ را به ترتیب برعکس نوشته ایم و عدد حاصل را در n ضرب کرده ایم. آیا ممکن است همه ارقام عدد بدست آمده برابر یک باشد؟ [۹ امتیاز]

۶. دایره محاطی مثلث ABC بر ضلع های AB، BC و AC مثلث ABC به ترتیب در نقاط N، K و M مماس است. خطوط MN و MK نیمساز بیرونی زاویه ABC را به ترتیب در نقاط R و S قطع می کنند. ثابت کنید که تقاطع خطوط RK و SN روی دایره محاطی مثلث ABC است. [۹ امتیاز]

۷. یک شهر بصورت مستطیلی است که به بلوک های مربعی برابر تقسیم شده است، در هر بلوک تنها یک ساختمان قرار دارد و هر ساختمان ۵ طبقه دارد. قانون بازسازی به شما اجازه می دهد که در هر نوبت دو بلوک با ضلع مشترک را که در آن لحظه در هر دو، ساختمان وجود دارد، انتخاب کنید و آن ساختمانی که تعداد طبقه های کمتر یا مساوی نسبت به ساختمان دیگر دارد را خراب کنید. بعد از تخریب، تعداد طبقات ساختمان تخریب شده به ساختمان باقی مانده اضافه می شود. کمترین تعداد ساختمان های باقیمانده در شهر با استفاده از قانون بازسازی چند تا است، اگر شهر از

الف) بلوک های ۲۰ × ۲۰ تشکیل شده است؟ [۵ امتیاز]

ب) بلوک های ۵۰ × ۹۰ تشکیل شده است؟ [۵ امتیاز]

شماره گروه:

39th International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper
Fall 2017

خانه ریاضیات
مسابقه سطح پیشرفته ۱
مهر ۱۳۹۶

Grades 8 − 9 (ages 13 − 15)
(The result is computed from the three problems with the highest scores, the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)

points		problems
4	1.	You are given one metal weight weighing 6 kg, sugar and weightless bags for it in an unlimited amount. There is also a balance with two pans which are in equilibrium if the ratio of weights on the left and the right pan equals 3 : 4. For one weighing, you can place any already available weights on the balance, and then add a bag of sugar to one of the pans such that the balance will be in equilibrium. You can then use this bag of sugar for further weighings. Is it possible to get a bag with 1 kg of sugar?
4	2.	Given are two coins of radius 1 cm, two coins of radius 2 cm, and two coins of radius 3 cm. You may place two of the coins on a table so that they are tangent, and add other coins, one at a time, so that a newly placed coin is tangent to at least two of previously placed ones. A new coin cannot lie over an old one. Is it possible to place several coins on the table so that the centers of three of them are collinear for sure?
6	3.	An analyst made a prediction for the change in the dollar/euro rate for each of the next three months: by what percentage (greater than 0% and less than 100%) the rate would change in July, in August, and in September. It turned out that for every month, he predicted the right percentage but was mistaken if it will go up or down (i.e., if he predicted that the rate will decrease by x %, then the real rate increased by x %, and vice versa). Nevertheless, the dollar/euro rate after three months coincided with the prediction. Did the dollar/euro rate go up or down on the whole?
	4.	There are 100 doors, each with its own key (which opens only this door). The doors are numbered 1 through 100, and so are the keys. It is known that the number of every key is either equal to the number of the door which it opens, or differs by 1. For one attempt you can select any door and any key and check whether a chosen key opens a chosen door. Is it always possible to find out which key opens which door:
1	a)	in 99 attempts;
3	b)	in 75 attempts;
4	c)	in 74 attempts?
9	5.	The decimal digits of a positive integer $n > 1$ are written in reverse order, and the resulting number is multiplied by n. Is it possible that we get a number with all digits equal to 1?
9	6.	The incircle of the triangle ABC touches the sides AB, BC and AC of the triangle ABC at points N, K and M, respectively. The lines MN and MK intersect the external bisector of angle ABC at points R and S, respectively. Prove that the lines RK and SN intersect on the incircle of the triangle ABC.
	7.	A city is a rectangle divided into equal square blocks with a single building in each block. Each building has 5 floors. The law of renovation allows you to choose two blocks with a common side, which contain buildings at this moment, and demolish that building which has fewer floors (or the same number of floors). After the demolition, the number of floors that were in the demolished building is added to the remaining building. What is the smallest possible number of buildings that can be left in the city by using the law of renovation, if the city consists of
5	a)	20×20 blocks;
5	b)	50×90 blocks?

شماره گروه:

۲A

39th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Fall 2017

خانه ریاضیات
مسابقه سطح پیشرفته ۲
مهر ۱۳۹۶

لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.

برای گروه‌هایی که حداقل یک نفر کلاس یازدهم یا پیش دانشگاهی است.

۱. ۱۰۰ درب وجود دارد که هر کدام کلید خودشان را دارد (کلید هر درب فقط همان درب را باز می کند). درب ها و کلید ها از ۱ تا ۱۰۰ شماره گذاری شده اند. می دانیم که اختلاف شماره هر درب و شماره کلیدی که آن درب را باز می کند، حداکثر برابر یک است. در هر بار تلاش می توانید هر درب و هر کلیدی که خواستید را انتخاب کنید و چک کنید که آیا کلید انتخاب شده، درب انتخاب شده را باز می کند یا نه. آیا همواره می توان فهمید کدام کلید کدام درب را باز می کند،

الف) با ۹۹ بار تلاش؛ [۱ امتیاز]

ب) با ۷۵ بار تلاش؛ [۲ امتیاز]

ج) با ۷۴ بار تلاش؟ [۳ امتیاز]

۲. شش دایره به شعاع ۱ با مرکزهای رئوس یک شش ضلعی منتظم کشیده شده است بطوری که مرکز شش ضلعی (O) درون هر ۶ دایره قرار دارد. یک زاویه به اندازه α و راس O، شش کمان از این شش دایره را قطع می کند. ثابت کنید جمع اندازه این کمان ها برابر ۶α است. [۵ امتیاز]

۳. یک تحلیلگر میزان تغییر نرخ دلار به تومان را برای هر کدام از ۱۲ ماه آینده پیش بینی کرده است، یعنی گفته است که نرخ با چه درصدی (بیش از صفر درصد و کمتر از صد درصد) در آذر، دی، بهمن و ... تغییر خواهد کرد. معلوم شده که او نرخ هر ماه را درست پیش بینی کرده اما بالا و پایین رفتن را اشتباه تشخیص داده (یعنی اگر پیش بینی کرده که نرخ x درصد کاهش می یابد، در واقعیت نرخ x درصد افزایش یافته و برعکس). با این وجود، نرخ دلار به تومان بعد از ۱۲ ماه دقیقاً منطبق بر پیش بینی او است. در مجموع نرخ دلار به تومان بالا رفته یا پایین آمده است؟ [۶ امتیاز]

۴. نشان دهید برای هر دنباله نامتناهی $a_۰, a_۱, \ldots, a_n, \ldots$ از اعداد ۱+ و ۱−، می توان اعداد n و k را پیدا کرد به طوری که

$$|a_۰ \cdot a_۱ \cdot \ldots \cdot a_k + a_۱ \cdot a_۲ \cdot \ldots \cdot a_{k+۱} + \ldots + a_n \cdot a_{n+۱} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}| = ۲۰۱۷.$$

[۸ امتیاز]

۵. شما باید یک تکه پنیر را مطابق قوانین زیر به تکه هایی تقسیم کنید: ۱) برش اول پنیر را به دو تکه تقسیم می کند و هر برش بعدی یکی از تکه های موجود را به دو تکه تقسیم می کند. ۲) بعد از هر برش نسبت وزن هر تکه به وزن هر تکه دیگر باید از عدد داده شده R بیشتر باشد.

الف) ثابت کنید برای $R = ۰/۵$ می توان پنیر را طوری برش زد که فرایند هیچگاه متوقف نشود (یعنی بعد از هر تعداد برش هنوز می توانیم برش زدن را ادامه دهیم). [۳ امتیاز]

ب) ثابت کنید اگر $R > ۰/۵$ در یک زمان مجبوریم برش زدن را متوقف کنیم. [۴ امتیاز]

ج) اگر $R = ۰/۶$ بیشترین تعداد ممکن بخش هایی که می توانیم بدست آوریم چندتا است؟ [۴ امتیاز]

۶. یک مثلث ABC داده شده است. فرض کنید I مرکز دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع AB باشد و فرض کنید $A_۱$ و $B_۱$ نقاط تماس اضلاع BC و AC با دایره های محاطی خارجی متناظرشان باشد. فرض کنید M نقطه وسط پاره خط IC و N نقطه تقاطع پاره خط های $AA_۱$ و $BB_۱$ باشند. ثابت کنید نقاط N، $B_۱$، A و M روی یک دایره اند. [۱۰ امتیاز]

۷. یک شهر به شکل یک مربع $n \times n$ است که به بلوک های ۱×۱ تقسیم شده است. خیابان ها از شمال به جنوب و از غرب به شرق کشیده شده اند. یک مرد هر روز با حرکت فقط به سمت شمال یا شرق از گوشه جنوب غربی به گوشه شمال شرقی قدم می زند و سپس با حرکت فقط به سمت جنوب یا غرب بر می گردد. در هر بار رفت و هر بار برگشت، او مسیرش را به گونه ای انتخاب می کند که مجموع طول بخش هایی از این مسیر که قبلا در هر جهت طی کرده است، مینیمم شود. ثابت کنید در n روز، او همه طول همه خیابان ها را طی می کند. [۱۰ امتیاز]

شماره گروه:

39th International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper
Fall 2017

خانه ریاضیات
مسابقه سطح پیشرفته ۲
مهر ۱۳۹۶

Grades 10 – 11 (ages 15 and older)
(The result is computed from the three problems with the highest scores, the scores for the individual parts of a single problem are summed.)

points		problems
	1.	There are 100 doors, each with its own key (which opens only this door). The doors are numbered 1 through 100, and so are the keys. It is known that the number of every key is either equal to the number of the door which it opens, or differs by 1. For one attempt you can select any door and any key and check whether a chosen key opens a chosen door. Is it always possible to find out which key opens which door:
1	a)	in 99 attempts;
2	b)	in 75 attempts;
3	c)	in 74 attempts?
5	2.	Six circles of radius 1 with centers in the vertices of a regular hexagon are drawn, so that the center O of the hexagon lies inside all six circles. An angle with angular measure α and vertex O cuts out six arcs in these circles. Prove that the sum of the sizes of these arcs is equal to 6α.
6	3.	An analyst made a prediction for the change in the dollar/euro rate for each of the next 12 months: by what percentage (greater than 0% and less than 100%) the rate would change in October, in November, in December, and so on. It turned out that for every month, he predicted the right percentage but was mistaken if it will go up or down (i.e., if he predicted that the rate will decrease by x %, then the real rate increased by x %, and vice versa). Nevertheless, the dollar/euro rate after 12 months coincided with the prediction. Did the dollar/euro rate go up or down on the whole?
8	4.	Show that for any infinite sequence $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ of ones and negative ones, we can choose n and k such that $$\lvert a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{k+1} + \ldots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k} \rvert = 2017.$$
	5.	You must cut a piece of cheese into parts following the rules: 1) The first cut must divide the cheese into two pieces, every next cut divides one of the existing pieces into two; 2) after every cut, the ratio of the weight of any piece to the weight to any other one must be greater than a given number R.
3	a)	Prove that for $R = 0.5$ we can cut the cheese so that the process will never stop (i.e., after any number of cuts, we will still be able to make one more cut).
4	b)	Prove that if $R > 0.5$, then at some point we will have to stop cutting.
4	c)	What is the greatest number of parts we can achieve if $R = 0.6$?
10	6.	A triangle ABC is given. Let I be the center of its excircle tangent to the segment AB, and let A_1 and B_1 be the points where the segments BC and AC touch the corresponding excircles. Let M be the midpoint of the segment IC, and let the segments AA_1 and BB_1 intersect at point N. Prove that the points N, B_1, A, and M are concyclic.
10	7.	A city has the form of an $n \times n$ square divided into 1×1 blocks. The streets run from north to south and from west to east. A man walks every day from the south-west corner to the north-east corner, moving only north or east, and then returns, moving only south or west. Each time (going forth and going back) he chooses his path so that the total length of its parts previously passed in any direction is minimal. Prove that in n days he will pass all the length of all streets.