



لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخنامه را با دقت مطالعه کنید.
مختص گروه‌هایی که هر سه نفر کلاس هشتم و نهم هستند.

۱. بیست بچه بصورت دایره دور هم نشسته‌اند (هم پسرها و هم دخترها حضور دارند). برای هر پسر، همسایه ساعتگرد او تی شرت آبی پوشیده است و برای هر دختر، همسایه پادساعتگرد او تی شرت قرمز پوشیده است. آیا می‌توان تعداد دقیق پسرها در دایره را مشخص کرد؟

[۳ امتیاز]

۲. یک مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه $\angle C = 60^\circ$ داده شده است. فرض کنید H محل برخورد ارتفاع‌های آن باشد. دایره با شعاع HC و مرکز H خطوط CA و CB را برای بار دوم به ترتیب در نقاط M و N قطع می‌کند. ثابت کنید خطوط AN و BM موازی یا منطبقند.

[۴ امتیاز]

۳. آیا ممکن است که هم مجموع و هم حاصلضرب 2016 عدد صحیح برابر 2016 باشد؟

[۵ امتیاز]

۴. روی یک مربع شطرنجی 10×10 خانه‌های مربع 5×5 بالا و سمت چپ سیاه هستند و بقیه خانه‌ها سفیدند. بزرگترین عدد n را بیابید بطوری که مربع اصلی را بتوان در طول مرز خانه‌ها به n چندضلعی برید، به گونه‌ای که در هر کدام از چندضلعی‌ها، تعداد خانه‌های سیاه سه برابر کمتر از تعداد خانه‌های سفید باشد. (نیازی نیست چندضلعی‌ها هم‌نهشت یا حتی با مساحت برابر باشند)

[۵ امتیاز]

۵. روی یک ورق کاغذ، یک مثلث آبی کشیده شده است. یک میانه، یک نیمساز و یک ارتفاع از این مثلث (نه لزوماً مربوط به سه راس متمایز) با رنگ قرمز کشیده شده است. مثلث به بخش‌های مختلفی تقسیم شده است. آیا ممکن است که یکی از این بخش‌ها یک مثلث متساوی الاضلاع با ضلع‌های قرمز باشد؟

[۵ امتیاز]



The result is computed from the three problems with the highest scores.
Grades 8 – 9 (ages 13-15).

points problems

- 3 1. Twenty children stand in a circle (both boys and girls are present). For each boy, his clockwise neighbour is in a blue T-shirt, and for each girl, her counterclockwise neighbour is in a red T-shirt. Is it possible to determine the precise number of boys in the circle?
- 4 2. Given an acute-angled triangle ABC with $\angle C = 60^\circ$. Let H be the point of intersection of its altitudes. The circle of radius HC centered at H meets the lines CA and CB for the second time at points M and N respectively. Prove that lines AN and BM are parallel or coincide.
- 5 3. Is it possible that the sum and the product of 2016 integers are both equal to 2016?
- 5 4. On a checkered square 10×10 the cells of the upper left 5×5 square are black and all the other cells are white. What is the maximal n such that the original square can be dissected (along the borders of the cells) into n polygons such that in each of them the number of black cells is three times less than the number of white cells? (The polygons need not be congruent or even equal in area.)
- 5 5. On a list of paper, a blue triangle is drawn. A median, a bisector and an altitude of this triangle (not necessarily from three distinct vertices) are drawn red. The triangle dissects into several parts. Is it possible that one of these parts is a regular triangle with red sides?



(لطفاً پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. یک نقطه درون یک چهارضلعی محدب به همه رئوس چهار ضلعی و چهار نقطه دیگر وصل شده است، به طوری که هر ضلع شامل یکی از آن چهار نقطه است. چهارضلعی به هشت مثلث تقسیم شده است که شعاع دایره محیطی آن‌ها برابر است. ثابت کنید مستطیل اولیه محاطی است (یعنی چهار راس مستطیل روی یک دایره است).

[۴ امتیاز]

۲. آیا ممکن است که هم مجموع و هم حاصلضرب 2016 عدد صحیح برابر 2016 باشد؟

[۴ امتیاز]

۳. روی یک مربع شطرنجی 10×10 خانه‌های مربع 5×5 بالا و سمت چپ سیاه هستند و بقیه خانه‌ها سفیدند. بزرگترین عدد n را بیابید بطوری که مربع اصلی را بتوان در طول مرز خانه‌ها به n چندضلعی برید، به گونه‌ای که در هر کدام از چندضلعی‌ها، تعداد خانه‌های سیاه سه برابر کمتر از تعداد خانه‌های سفید باشد. (نیازی نیست چندضلعی‌ها هم‌نهشت یا حتی با مساحت برابر باشند)

[۴ امتیاز]

۴. یک کارخانه مخارجش را در بودجه‌اش به تومان و در 100 بند قرار داده است. هر کدام از 100 عدد بدست آمده حداکثر دو رقم اعشار دارند. هر حساب‌دار یک کپی از این لیست دارد و دو عدد در آن را انتخاب می‌کند و آن دو را جمع می‌زند. سپس رقم‌های اعشاری مجموع را (در صورت وجود) حذف کرده و رقم حاصل را به جای آن دو عدد می‌نویسد. در لیست جدید که شامل 99 عدد است به طور مشابه عمل فوق را انجام می‌دهد و اینکار را تکرار می‌کند تا یک عدد صحیح باقی بماند. نتیجه نهایی برای همه حساب‌دارها متفاوت شده است. حداکثر تعداد ممکن حساب‌دارها چند است؟

[۶ امتیاز]

۵. وسط هر یک از 12 یال یک مکعب، علامت‌گذاری شده است. آیا یک کره الزاماً شامل همه این نقاط می‌شود، اگر آن کره شامل

[۳ امتیاز]

(a) حداقل ۶ نقطه علامت‌گذاری شده باشد؟

[۳ امتیاز]

(b) حداقل ۷ نقطه علامت‌گذاری شده باشد؟



*The result is computed from the three problems with the highest scores.
Grades 10 – 11 (ages 15 and older).*

points problems

- 4 1. A point inside a convex quadrilateral is connected with all the vertices and with four more points such that each side contains one of them. The quadrilateral dissects into eight triangles with equal radii of circumcircles. Prove that the original quadrilateral is cyclic.
- 4 2. Is it possible that the sum and the product of 2016 integers are both equal to 2016?
- 4 3. On a checkered square 10×10 the cells of the upper left 5×5 square are black and all the other cells are white. What is the maximal n such that the original square can be dissected (along the borders of the cells) into n polygons such that in each of them the number of black cells is three times less than the number of white cells? (The polygons need not be congruent or even equal in area.)
- 6 4. A firm has fixed its expenses in roubles for 100 articles in its budget. Each of the 100 numbers obtained has at most two digits after the decimal point. Each bookkeeper chooses two numbers in his copy of this list, adds them, removes the digits of the sum after the decimal point (if any) and writes the result instead of those two numbers. The new list consisting of 99 numbers is treated in the same way and so on, until a single integer remains. The final results happened to be different for all bookkeepers. What is the maximal possible number of the bookkeepers?
- 3 5. At each of the 12 edges of a cube, the midpoint is marked. Does a sphere necessarily contain all these points if it contains
 - 3 a) at least 6 of marked points;
 - 3 b) at least 7 of marked points?