شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2015

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۱)
اسفند ۱۳۹۳

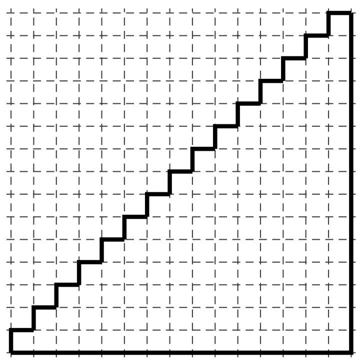
(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. آیا می‌توان شش وجه یک مکعب را با سه رنگ رنگ‌آمیزی کرد بطوری‌که هر سه رنگ ظاهر شوند، اما از هر موقعیت تنها بتوان حداکثر دو رنگ را دید؟ (از هر موقعیت تنها می‌توان وجوه مجاور با یک راس را دید). [۳ امتیاز]

۲. نقاط K و L روی ضلع AB از مثلث ABC علامت زده شده اند بطوری که $KL = BC$ و $AK = LB$. اگر M وسط ضلع AC باشد، ثابت کنید که $\angle KML = 90^\circ$. [۴ امتیاز]

۳. پویا ۱۰ توان متوالی از عدد ۲ را، با شروع از یک توان، با هم جمع می‌کند. بهرام تعدادی عدد صحیح مثبت متوالی را با شروع از یک با هم جمع می‌کند. آیا ممکن است هر دو به جواب یکسانی برسند؟ [۴ امتیاز]

۴. یک شکل روی شبکه داده شده است که شامل ۱۵ پله و یک خط عمودی و یک خط افقی است (شکل را ببینید). کمترین تعداد مربع‌هایی که می‌توان این شکل را به آن‌ها تقسیم کرد چندتا است؟ (تقسیم کردن تنها در طول خطوط شبکه مجاز است).



[۴ امتیاز]

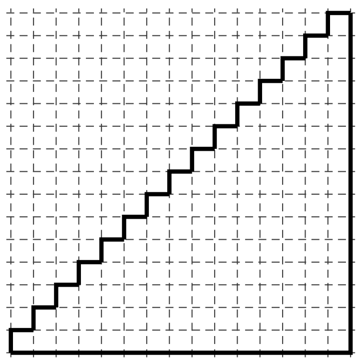
۵. در بین $2n + 1$ عدد صحیح نامنفی، دقیقاً یک عدد 0 وجود دارد و هر کدام از اعداد $1, 2, \ldots, n$ دقیقاً دو بار ظاهر شده اند. برای چه مقدار n می‌توان این اعداد را به گونه ای مرتب کرد که بین هر دو m، برای $m = 1, \ldots, n$، دقیقاً m عدد وجود داشته باشد. [۵ امتیاز]

شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior O level paper
Spring 2015

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۱)
اسفند ۱۳۹۳

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
3	1. Is it possible to paint six faces of a cube into three colours so that each colour is present, but from any position one can see at most two colours? (For any position it is possible to see only faces adjacent to some vertex.)
4	2. Points K and L are marked on side AB of triangle ABC so that $KL = BC$ and $AK = LB$. Given that M is the midpoint of side AC, prove that $\angle KML = 90°$.
4	3. Pete summed up 10 consecutive powers of 2, starting from some power, while Basil summed up several consecutive positive integers starting from 1. Can they get the same result?
4	4. A figure, given on the grid, consists of a 15-step staircase and horizontal and vertical bases (see the figure). What is the least number of squares one can split this figure into? (Splitting is allowed only along the grid). 
5	5. Among $2n+1$ positive integers there is exactly one 0, while each of the numbers $1, 2, ..., n$ is presented exactly twice. For which n can one line up these numbers so that for any $m = 1, \ldots, n$ there are exactly m numbers between two m's?

شماره گروه:

۲

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2015

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۲)
اسفند ۱۳۹۳

(لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید.)

۱. پویا ۱۰۰ توان متوالی از عدد ۲ را، با شروع از یک توان، با هم جمع می‌کند. بهرام تعدادی عدد صحیح مثبت متوالی را با شروع از یک با هم جمع می‌کند. آیا ممکن است هر دو به جواب یکسانی برسند؟ [۳ امتیاز]

۲. یک شب‌پره چهار سوراخ در یک فرش مربعی به ضلع ۲۷۵ سانتی‌متر ایجاد می‌کند. آیا همواره می‌توان یک قطعه مربع به ضلع ۱ متر از فرش را برید که بدون سوراخ باشد؟ (سوراخ‌ها را به عنوان نقطه در نظر بگیرید.) [۴ امتیاز]

۳. در بین $۲n+۱$ عدد صحیح نامنفی، دقیقاً یک عدد ۰ وجود دارد و هر کدام از اعداد $۱,۲,\ldots,n$ دقیقاً دو بار ظاهر شده اند. برای چه مقدار n می‌توان این اعداد را به گونه ای مرتب کرد که بین هر دو m، برای $m=۱,\ldots,n$، دقیقاً m عدد وجود داشته باشد. [۴ امتیاز]

۴. نقاط K و L روی میانه AM از مثلث ABC مشخص شده اند، به طوری که $AK=KL=LM$. نقطه P به گونه ای انتخاب شده است که مثلث‌های KPL و ABC متشابه‌اند $\left(\frac{KP}{AB}=\frac{PL}{BC}=\frac{KL}{AC}\right)$. می‌دانیم نقاط P و C در یک طرف خط AM قرار دارند. ثابت کنید که نقطه P روی خط AC است. [۵ امتیاز]

۵. تعداد ۲۰۱۵ عدد صحیح مثبت روی یک دایره قرار دارند. تفاضل هر دو عدد مجاور با بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد برابر است. بزرگترین عدد صحیح مثبت N را که همواره مقسوم علیه حاصل‌ضرب این ۲۰۱۵ عدد است، بیابید. [۵ امتیاز]

شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior O level paper
Spring 2015

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی (سطح عادی ۲)
اسفند ۱۳۹۳

(The result is computed from the three problems with the highest scores.)

points	problems
3	1. Pete summed up 100 consecutive powers of 2, starting from some power, while Basil summed up several consecutive positive integers starting from 1. Can they get the same result?
4	2. A moth made four small holes in a square carpet with a 275 cm side. Can one always cut out a square piece with a 1 m side without holes? (Consider holes as points.)
4	3. Among $2n+1$ positive integers there is exactly one 0, while each of the numbers $1, 2, ..., n$ is presented exactly twice. For which n can one line up these numbers so that for any $m = 1, \dots, n$ there are exactly m numbers between two m's?
5	4. Points K and L are marked on the median AM of triangle ABC, so that $AK = KL = LM$. Point P is chosen so that triangles KPL and ABC are similar $\left(\frac{KP}{AB} = \frac{PL}{BC} = \frac{KL}{AC}\right)$. Given that points P and C are on the same side of line AM, prove that point P lies on line AC.
5	5. 2015 positive integers are arranged in a circular order. The difference between any two adjacent numbers coincides with their greatest common divisor. Determine the maximal positive integer N which is for sure a divisor of the product of these 2015 numbers.