شماره گروه:

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی تورنمنت شهرها
(سطح پیشرفته ۱)
اسفند ۱۳۹۳

International Mathematics
Tournament of Towns
Junior A level paper, Spring 2015
*Grades 8–9 (ages 13–15)*

لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را با دقت مطالعه کنید. این برگه مخصوص گروه‌هایی است که هر سه نفر، اول دبیرستان باشند.

۱. نقطه $E$ درون متوازی الاضلاع $ABCD$ انتخاب می‌شود بطوری که $CD = CE$. ثابت کنید پاره‌خط $DE$ بر پاره‌خطی که وسط پاره‌خط $AE$ را به وسط پاره‌خط $BC$ وصل می‌کند، عمود است. [۴ امتیاز]

۲. یک منطقه حفاظت‌شده به شکل یک چندضلعی غیرمحدب است. این منطقه با یک حصار شفاف در طول محیطش محافظت می‌شود و در یک میدان مین احاطه شده است، به گونه‌ای که یک جاسوس تنها می‌تواند در طول حصار حرکت کند. جاسوس یک بار دور منطقه حرکت می‌کند به‌طوری که منطقه همیشه در سمت راست او است. یک خط مستقیم برق با ۳۶ دکل این منطقه را قطع می‌کند که برخی از دکل‌ها درون منطقه و برخی بیرون آن قرار دارند. خط برق از رئوس حصار عبور نمی‌کند. جاسوس هر بار که از خط برق عبور می‌کند، تعداد دکل‌های سمت چپ خود را می‌شمارد (او می‌تواند همه دکل‌ها را ببیند). جاسوس به محض بازگشت به نقطه اولیه، در مجموع ۲۰۱۵ دکل را شمرده است. تعداد دکل‌های درون حصار چند تا است؟ [۶ امتیاز]

۳. الف) اعداد صحیح مثبت $x$، $x^۲$ و $x^۳$ با رقم یکسانی شروع می‌شوند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این رقم برابر یک است؟ [۳ امتیاز]
ب) همین سوال را برای اعداد صحیح مثبت $x, x^۲, x^۳, \dots, x^{۲۰۱۵}$ جواب دهید. [۴ امتیاز]

۴. برای هر ضلع یک چندضلعی، خط شامل آن ضلع حداقل از یک راس دیگر این چندضلعی عبور می‌کند. آیا ممکن است که تعداد رئوس این چندضلعی،

الف) بیشتر از ۹ نباشد؟ [۴ امتیاز]

ب) بیشتر از ۸ نباشد؟ [۵ امتیاز]

۵. (الف) یک جدول $n \times ۲$ (که $n > ۲$) با اعداد به‌گونه‌ای پر شده است که جمع اعداد در همه ستون‌ها متفاوت است. ثابت کنید می‌توان اعداد را در جدول طوری جابه جا کرد که جمع اعداد در همه ستون‌ها هم‌چنان متفاوت باشد و علاوه بر آن، جمع اعداد در همه سطرها نیز متفاوت باشد. [۳ امتیاز]
(ب) یک جدول $۱۰ \times ۱۰$ با اعداد به‌گونه‌ای پر شده است که جمع اعداد در همه ستون‌ها متفاوت است. آیا همواره می‌توان اعداد را در جدول طوری جابه جا کرد که جمع اعداد در همه ستون‌ها هم‌چنان متفاوت باشد و علاوه بر آن، جمع اعداد در همه سطرها نیز متفاوت باشد؟ [۶ امتیاز]

۶. یک $N$ـضلعی محدب با اضلاع برابر درون یک دایره واقع شده است. هر ضلع در هر دو جهت تا محل برخورد با دایره امتداد داده شده است به طوری که دو پاره‌خط جدید را در بیرون چندضلعی تشکیل می‌دهد. ثابت کنید می‌توان برخی از این $۲N$ پاره‌خط جدید را با رنگ قرمز و بقیه را با رنگ آبی رنگ‌آمیزی کرد، بطوری که مجموع طول همه پاره‌خط‌های قرمز برابر با مجموع طول همه پاره‌خط‌های آبی باشد. [۹ امتیاز]

۷. یک امپراطور، ۲۰۱۵ جادوگر را به یک جشن دعوت می‌کند. هر کدام از جادوگرها می‌داند که کدام جادوگر خوب و کدام بد است، ولی امپراطور این را نمی‌داند. یک جادوگر خوب همیشه حقیقت را می‌گوید، در حالی که یک جادوگر بد می‌تواند هرچه بخواهد بگوید. امپراطور از هر جادوگر تنها یک سوال، که می‌تواند برای هر جادوگر متفاوت باشد، می‌پرسد (به ترتیبی که خودش انتخاب می‌کند) و به جواب او که "بله" یا "خیر" است، گوش می‌دهد. امپراطور بعد از شنیدن همه جواب‌ها، یک جادوگر را از یک در جادویی اخراج می‌کند که نشان می‌دهد این جادوگر بد است یا خوب. سپس امپراطور این فرایند را دوباره از اول با بقیه جادوگرها تکرار می‌کند و این کار چندبار تکرار می‌شود. امپراطور می‌تواند پس از هر جواب، متوقف شود و یک جادوگر را اخراج کند یا نکند. ثابت کنید امپراطور می‌تواند همه جادوگرهای بد را اخراج کند، درحالی که حداکثر یک جادوگر خوب را اخراج کرده است. [۱۰ امتیاز]

شماره گروه:

۱A

**International Mathematics Tournament of Towns**

Junior A level paper, Spring 2015

*Grades 8–9 (ages 13–15)*

خانه ریاضیات اصفهان

مسابقه تیمی تورنمنت شهرها

(سطح پیشرفته ۱)

اسفند ۱۳۹۳

*(The result is computed from the three problems with the highest scores, the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)*

| points | | problems |
|---|---|---|
| 4 | 1. | A point is chosen inside a parallelogram $ABCD$ so that $CD = CE$. Prove that the segment $DE$ is perpendicular to the segment connecting the midpoints of the segments $AE$ and $BC$. |
| 6 | 2. | A prohibited area has the shape of a non-convex polygon. It is protected by a transparent chain fence along its perimeter and is surrounded by a minefield so that a spy can only move along the fence. The spy went around the area once so that the area was always on his right. A straight power line with 36 poles crosses this area so that some of the poles are inside the area, and some are outside it. The power line does not pass through the vertices of the fence. Each time the spy crossed the power line, he counted the poles to the left of him (he could see all the poles). Up to the return to the initial point, the spy had counted 2015 poles in total. Find the number of poles inside the fence. |
| | 3. | |
| 3 | a) | The positive integers $x$, $x^2$ and $x^3$ begin with the same digit. Does it imply that this digit is 1? |
| 4 | b) | The same question for the positive integers $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$. |
| | 4. | For each side of some polygon, the line containing it contains at least one more vertex of this polygon. Is it possible that the number of vertices of this polygon is |
| 4 | a) | not greater than 9? |
| 5 | b) | not greater than 8? |
| | 5. | |
| 3 | a) | A $2 \times n$-table (with $n > 2$) is filled with numbers so that the sums in all the columns are different. Prove that it is possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different. |
| 6 | b) | A $10 \times 10$-table is filled with numbers such that the sums in all the columns are different. Is it always possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different? |
| 9 | 6. | An convex $N$-gon with equal sides is located inside a circle. Each side is extended in both directions up to the intersection with the circle so that it contains two new segments outside the polygon. Prove that one can paint some of these new $2N$ segments in red and the others in blue so that the sum of lengths of all the red segments would be the same as for the blue ones. |
| 10 | 7. | An Emperor invited 2015 wizards to a festival. Each of the wizards knows who of them is good and who is evil, however the Emperor doesn't know this. A good wizard always tells the truth, while an evil wizard can say what he wants. The Emperor asks each wizard (in an order of his choice) a single question, maybe different for different wizards, and listens to the answer which is either "yes" or "no". Having listened to all the answers, the Emperor expels a single wizard through a magic door which shows if this wizard is good or evil. Then the Emperor repeats the procedure with the remaining wizards, and so on. The Emperor may stop after any answer, and after this the Emperor may expel or not expel a wizard. Prove that the Emperor can expel all the evil wizards having expelled at most one good wizard. |

شماره گروه:

International Mathematics
Tournament of Towns
Senior A level paper, Spring 2015
*Grades 10–11 (ages 15 and older)*

خانه ریاضیات اصفهان
مسابقه تیمی تورنمنت شهرها
(سطح پیشرفته ۲)
اسفند ۱۳۹۳

---

لطفا پیش از شروع، صفحه اول پاسخ‌نامه را مطالعه کنید. این برگه مخصوص گروه‌هایی است که حداقل یک عضو، دوم یا سوم دبیرستان باشد.

۱. الف) اعداد صحیح مثبت $x$، $x^۲$ و $x^۳$ با رقم یکسانی شروع می‌شوند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این رقم برابر یک است؟ [۲ امتیاز]
ب) همین سوال را برای اعداد صحیح مثبت $x, x^۲, x^۳, \ldots, x^{۲۰۱۵}$ جواب دهید. [۳ امتیاز]

۲. نقطه $X$ روی قاعده $BC$ از یک مثلث متساوی الساقین $ABC$ و نقاط $P$ و $Q$ به ترتیب روی اضلاع $AB$ و $AC$ مشخص شده‌اند به طوری که $APXQ$ یک متوازی الاضلاع است. ثابت کنید نقطه $Y$ که قرینه نقطه $X$ نسبت به خط $PQ$ است، روی دایره محیطی مثلث $ABC$ است. [۵ امتیاز]

۳. (الف) یک جدول $۲ \times n$ (که $n > ۲$) با اعداد به‌گونه‌ای پر شده است که جمع اعداد در همه ستون‌ها متفاوت است. ثابت کنید می‌توان اعداد را در جدول طوری جابه جا کرد که جمع اعداد در همه ستون‌ها هم‌چنان متفاوت باشد و علاوه بر آن، جمع اعداد در همه سطرها نیز متفاوت باشد. [۲ امتیاز]
(ب) یک جدول $۱۰۰ \times ۱۰۰$ با اعداد به‌گونه‌ای پر شده است که جمع اعداد در همه ستون‌ها متفاوت است. آیا همواره می‌توان اعداد را در جدول طوری جابه جا کرد که جمع اعداد در همه ستون‌ها هم‌چنان متفاوت باشد و علاوه بر آن، جمع اعداد در همه سطرها نیز متفاوت باشد؟ [۶ امتیاز]

۴. یک $N$ـضلعی محدب با اضلاع برابر درون یک دایره واقع شده است. هر ضلع در هر دو جهت تا محل برخورد با دایره امتداد داده شده است به طوری که دو پاره‌خط جدید را در بیرون چندضلعی تشکیل می‌دهد. ثابت کنید می‌توان برخی از این $۲N$ پاره‌خط جدید را با رنگ قرمز و بقیه را با رنگ آبی رنگ‌آمیزی کرد، بطوری که مجموع طول همه پاره‌خط‌های قرمز برابر با مجموع طول همه پاره‌خط‌های آبی باشد. [۸ امتیاز]

۵. آیا دو چندجمله‌ای با ضرایب صحیح وجود دارند، به طوری که هر کدام از آن دو چندجمله‌ای، ضریبی با قدر مطلق بیشتر از ۲۰۱۵ دارد، اما همه ضرایب حاصلضرب آن دو چندجمله‌ای با قدرمطلق حداکثر ۱ است؟ [۱۰ امتیاز]

۶. یک امپراطور، ۲۰۱۵ جادوگر را به یک جشن دعوت می‌کند. هر کدام از جادوگرها می‌داند که کدام جادوگر خوب و کدام بد است، ولی امپراطور این را نمی‌داند. یک جادوگر خوب همیشه حقیقت را می‌گوید، در حالی که یک جادوگر بد می‌تواند هرچه بخواهد بگوید. امپراطور به هر جادوگر یک کارت می‌دهد که یک سوال روی آن نوشته شده است. این سوال می‌تواند برای هر جادوگر متفاوت باشد. سپس امپراطور به جواب همه جادوگرها که "بله" یا "خیر" است، گوش می‌دهد. امپراطور بعد از شنیدن همه جواب‌ها، یک جادوگر را از یک در جادویی اخراج می‌کند که نشان می‌دهد این جادوگر بد است یا خوب. پس از آن امپراطور کارت‌های جدید با سوالات را درست می‌کند و این فرایند را دوباره از اول با بقیه جادوگرها تکرار می‌کند و این کار چندبار تکرار می‌شود. امپراطور می‌تواند پس از هر جواب، متوقف شود و یک جادوگر را اخراج کند یا نکند. ثابت کنید امپراطور می‌تواند همه جادوگرهای بد را اخراج کند، درحالی که حداکثر یک جادوگر خوب را اخراج کرده است. [۱۰ امتیاز]

۷. می‌دانیم اگر دایره محیطی و محاطی یک چهارضلعی هم مرکز باشند، آن‌گاه این چهارضلعی مربع است. آیا گزاره مشابه در فضا درست است، یعنی اگر یک مکعب‌وار درون یک کره محاط شده باشد و محیط به کره دیگر باشد و این دو کره هم مرکز باشند، آیا می‌توان گفت این مکعب‌وار، یک مکعب است؟ (یک مکعب‌وار یک چندوجهی با ۶ وجه چهارضلعی است بطوری که هر راس متعلق به ۳ ضلع است.) [۱۰ امتیاز]

شماره گروه:

۲A

**International Mathematics**
**Tournament of Towns**

Senior A level paper, Spring 2015

*Grades 10–11 (ages 15 and older)*

خانه ریاضیات اصفهان

مسابقه تیمی تورنمنت شهرها

(سطح پیشرفته ۲)

اسفند ۱۳۹۳

خانه ریاضیات

---

*(The result is computed from the three problems with the highest scores, the scores for the individual parts of a single problem are summed up.)*

| points | problems | |
|---|---|---|
| | 1. | |
| 2 | a) | The positive integers $x$, $x^2$ and $x^3$ begin with the same digit. Does it imply that this digit is 1? |
| 3 | b) | The same question for the positive integers $x, x^2, x^3, \ldots, x^{2015}$. |
| 5 | 2. | A point $X$ is marked on the base $BC$ of an isosceles triangle $ABC$, and points $P$ and $Q$ are marked on the sides $AB$ and $AC$ respectively so that $APXQ$ is a parallelogram. Prove that the point $Y$ symmetrical to $X$ with respect to line $PQ$ lies on the circumcircle of the triangle $ABC$. |
| | 3. | |
| 2 | a) | A $2 \times n$-table (with $n > 2$) is filled with numbers so that the sums in all the columns are different. Prove that it is possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different. |
| 6 | b) | A $100 \times 100$-table is filled with numbers such that the sums in all the columns are different. Is it always possible to permute the numbers in the table so that the sums in the columns would still be different and the sums in the rows would also be different? |
| 8 | 4. | An convex $N$-gon with equal sides is located inside a circle. Each side is extended in both directions up to the intersection with the circle so that it contains two new segments outside the polygon. Prove that one can paint some of these new $2N$ segments in red and the others in blue so that the sum of lengths of all the red segments would be the same as for the blue ones. |
| 10 | 5. | Do there exist two polynomials with integer coefficients such that each polynomial has a coefficient with an absolute value exceeding 2015 but all coefficients of their product have absolute values not exceeding 1? |
| 10 | 6. | An Emperor invited 2015 wizards to a festival. Each of the wizards knows who of them is good and who is evil, however the Emperor doesn't know this. A good wizard always tells the truth, while an evil wizard can say what he wants. The Emperor gives each wizard a card with a single question, maybe different for different wizards, and after that listens to the answers of all wizards which are either "yes" or "no". Having listened to all the answers, the Emperor expels a single wizard through a magic door which shows if this wizard is good or evil. Then the Emperor makes new cards with questions and repeats the procedure with the remaining wizards, and so on. The Emperor may stop after any answer, and after this the Emperor may expel or not expel a wizard. Prove that the Emperor can expel all the evil wizards having expelled at most one good wizard. |
| 10 | 7. | It is well-known that if a quadrilateral has the circumcircle and the incircle with the same centre then it is a square. Is the similar statement true in 3 dimensions: namely, if a cuboid is inscribed into a sphere and circumscribed around a sphere and the centres of the spheres coincide, does it imply that the cuboid is a cube? (A cuboid is a polyhedron with 6 quadrilateral faces such that each vertex belongs to 3 edges.) |